Examen d'Analyse 2 – Deuxième Session

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

/12

Exercice 1 - Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

/1.5

1. Déterminer si la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n^2 - 3n + 3} - n$ converge, et si oui calculer sa limite.

/1

2. Déterminer si la série $\sum \frac{2^{-n}}{\sqrt{n}}$ est convergente ou divergente.

/1.5

3. En intégrant par parties, calculer $\int_0^{\pi/4} x\cos(2x)dx$.
4. En utilisant la formule de substitution, calculer les intégrales suivantes :

/1.5

   (a) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

/2

   (b) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, en posant $x = \sin u$.
5. Etudier si les intégrales généralisées suivantes convergent ou non (sans les calculer) :

/2 : /0.5 + /1 + /0.5

$$(a)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad (b)\ \int_1^{+\infty} x^2 e^{-2x}dx \qquad (c)\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

/2.5

6. Calculer la matrice jacobienne $[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}]_{i,j}$ de la fonction suivante (en précisant son ensemble de définition) :

$$f(x_1,x_2,x_3) = \left(x_3\ln(x_1+x_2),\ \frac{\sin(x_1x_3)}{x_2}\right).$$

/8

Exercice 2 - Dans cet exercice on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+xy}.$$

/2

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. En déduire le gradient de f.

/0.5

2. Démontrer que le gradient ne s'annule qu'en un seul point, qu'on notera M.

/3.5

3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f, c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$. Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

/1

4. Ecrire x^2+y^2+xy sous la forme $(x+ay)^2+by^2$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.

/1

5. En déduire que le point critique est un minimum.