Corrigé du partiel d'analyse 2

Exercice 1

1) (H_n) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ pour $n \geq 0$.

- Initialisation : $n = 0$.

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} 3^k = 3^0 = 1$

et $\displaystyle\frac{3^{0+1}-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

donc (H_0) est vraie !

- Hérédité : Soit $n \geq 0$. On suppose (H_n) vraie. Montrons que (H_{n+1}) est vraie.

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1}$

$\displaystyle = \frac{3^{n+1}-1}{2} + 3^{n+1}$ par hypothèse de récurrence

$\displaystyle = \frac{3^{n+1} - 1 + 2 \times 3^{n+1}}{2}$

$\displaystyle = \frac{3^{n+1}(1+2) - 1}{2}$

$\displaystyle = \frac{3^{n+2}-1}{2}$

Donc (H_{n+1}) est vraie.

- Conclusion : H_n est vraie pour $n \geq 0$.

2)

(a) On a : $u_n = \dfrac{n^2+5n+2}{n^2+2n+3}$

$$= \frac{\cancel{n^2}(1+5/n+2/n^2)}{\cancel{n^2}(1+2/n+3/n^2)}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(b) On a : $|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(c) On a : $u_n = \sqrt{n^2+2n+2} - n$

$$= \frac{(n^2+2n+2)-n^2}{\sqrt{n^2+2n+2}+n} \quad \text{par quantité conjuguée.}$$

$$= \frac{2n+2}{\sqrt{n^2+2n+2}+n}$$

$$= \frac{\cancel{n}(2+2/n)}{\cancel{n}(\sqrt{1+2/n+2/n^2}+1)}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3) (a) On a : $\left|\dfrac{2^{-(n+1)}}{2^{-n}} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right| = \dfrac{1}{2} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\ln[n(1+1/n)]}{\ln n}$

$$= \frac{1}{2} \frac{\ln n + \ln(1+1/n)}{\ln n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\times\left(1+\frac{0}{+\infty}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

Donc par le critère de d'Alembert, $\sum 2^{-n} \ln n$ converge.

(e) On a : $\left| \dfrac{4^{n+1}/(n+1)^3}{4^n/n^3} \right| = 4 \times \dfrac{n^3}{(n+1)^3} = 4 \times \dfrac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}(1+1/n)^3}$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 4 \times \frac{1}{(1+0)^3} = 4 > 1$$

Donc par le critère de d'Alembert, $\sum \dfrac{4^n}{n^3}$ diverge.

4) On rappelle : $\displaystyle\int_1^e f'(x) g(x) dx = \left[f(x)g(x)\right]_1^e - \int_1^e f(x) g'(x) dx$

On pose : $f'(x) = x^3$ donc $f(x) = \dfrac{x^4}{4}$

$g(x) = \ln x$ donc $g'(x) = \dfrac{1}{x}$

D'où par intégration par parties, on a :

$$\int_1^e x^3 \ln x \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4} \times \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{e^4}{4} \ln e - \frac{1^4}{4} \ln 1 - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^e = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{3e^4 + 1}{16}$$

Exercice 2 :

1) f_0 est continue et dérivable sur $[0;1]$ comme composée de fonctions continues et dérivables sur $[0;1]$.

On a : $f_0'(x) = \left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)' = -\dfrac{(1+x+x^2)'}{(1+x+x^2)^2} = -\dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} < 0$

et $f_0(0) = 1$

$f_0(1) = \dfrac{1}{3}$

Donc on peut dresser le tableau de variation :

x	0		1
f_0'		$-$	
f_0	1	$\searrow$	$1/3$

2) On a : $g(x) = -f_0'(x) = \dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

avec $u(x) = 1+2x$
$v(x) = (1+x+x^2)^2$

D'où $g'(x) = \left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

Et $u'(x) = 2$
$v'(x) = ((1+x+x^2)^2)' = 2(1+x+x^2)'(1+x+x^2)$
$= 2(1+2x)(1+x+x^2)$

Donc $g'(x) = 2\times(1+x+x^2)^2 - (1+2x)\times 2(1+2x)(1+x+x^2)$

$$= \frac{2(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)^4}\left[(1+x+x^2) - (1+2x)^2\right]$$

$$= \frac{2(\cancel{1}+x+x^2-4x^2-4x-\cancel{1})}{(1+x+x^2)^3}$$

$$= \frac{2(-3x^2-3x)}{(1+x+x^2)^3} = -\frac{6x(1+x)}{(1+x+x^2)^3} \leq 0$$

Donc g est décroissante sur $[0;1]$.

D'où $g(1) \leq g(x) \leq g(0)$ pour $x \in [0;1]$

Soit $\dfrac{1+2\times1}{(1+1+1^2)^2} \leq g(x) \leq \dfrac{1+2\times0}{(1+0+0^2)^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \leq g(x) \leq 1.$

3) On a : $I_0+I_1+I_2 = \int_0^1 (f_0(x)+f_1(x)+f_2(x))\,dx$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x+x^2} + \frac{x}{1+x+x^2} + \frac{x^2}{1+x+x^2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\cancel{1+x+x^2}}{\cancel{1+x+x^2}}\, dx$$

$$= \int_0^1 dx$$

$$= 1-0 = 1.$$

Donc $I_0+I_1+I_2 = 1$.

4) Pour $n \geq 0$ et $x \in [0;1]$, on a :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x+x^2} = \frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2} \leq 0$$

Donc $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

Comme l'intégration conserve le sens des inégalités, on a :

$$\int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

soit $I_{n+1} \leq I_n$ donc la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

5) Pour $n \geq 0$ et $x \in [0;1]$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{1+x+x^2} \leq 1$$

donc $$0 \leq \frac{x^n}{1+x+x^2} \leq x^n$$

soit $$0 \leq f_n(x) \leq x^n$$

D'où en intégrant : $0 \leq \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$

$$\iff 0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\iff 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Comme $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,

par le thm des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

6) On a : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx$

$$= \int_0^1 x^n f_0(x) dx.$$

On rappelle : $\int_0^1 u'(x) v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x) v'(x) dx$

On pose : $u'(x) = x^n$ donc $u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$v(x) = f_0(x)$ donc $v'(x) = f_0'(x) = -g(x)$

D'où $I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} f_0(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}(-g(x)) dx$

$$= \frac{1^{n+1}}{n+1} \times f_0(1) - \frac{0^{n+1}}{n+1} f_0(0) + \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} g(x) dx.$$

$$= \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} g(x) dx$$

7) D'après la question 2) pour $x \in [0;1]$, on a :

$$\frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1$$

D'où pour $n \geq 0$, on a :

$$\frac{1}{3} x^{n+1} \leq g(x) x^{n+1} \leq x^{n+1}$$

Soit par intégration :

$$\frac{1}{3} \int_0^1 x^{n+1} dx \leq \int_0^1 g(x) x^{n+1} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx$$

D'où $\frac{1}{3}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 \leq \int_0^1 g(x) x^{n+1} dx \leq \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$

soit $\frac{1}{3(n+2)} \leq \int_0^1 g(x) x^{n+1} dx \leq \frac{1}{n+2}$

D'après la question 6), on a :

$$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 g(x)\, x^{n+1}\, dx.$$

Or, d'après ce qui précède, on a :

$$\frac{1}{3(n+2)} \leq \int_0^1 g(x)\, x^{n+1}\, dx \leq \frac{1}{n+2}$$

d'où $$\frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 g(x)\, x^{n+1}\, dx \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

d'où $$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 g(x)\, x^{n+1}\, dx \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

donc $$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$