Univ. Paris VIII, 2012-2013

Partiel d'Analyse 2

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

/11 **Exercice 1 -** Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

/2
1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$ on a
$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

/1+/1+/2
2. Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, dire si elle converge et si oui déterminer sa limite :
$$(a)\ u_n = \frac{n^2+5n+2}{n^2+2n+3} \qquad (b)\ u_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad (c)\ u_n = \sqrt{n^2+2n+2} - n$$

/1.5+/1.5
3. Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle est convergente ou divergente :
$$(a)\ \sum 2^{-n}\ln(n) \qquad (b)\ \sum \frac{4^n}{n^3}$$

/2
4. En intégrant par parties, calculer $\int_1^e x^3 \ln(x)dx$.

/9 **Exercice 2 -** Pour tout entier $n \geq 1$ on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par
$$f_n(x) = \frac{x^n}{x^2+x+1}.$$
On rappelle que $x^0 = 1$ pour tout x, si bien que $f_0(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$. On pose aussi, pour $x \in [0,1]$ et $n \geq 0$:
$$g(x) = -f_0'(x) \text{ et } I_n = \int_0^1 f_n(x)dx.$$

/1
1. Dresser le tableau de variation de la fonction f_0.

/1+/0.5
2. Calculer la dérivée de g, et démontrer que g est décroissante sur $[0,1]$. En déduire que pour tout x appartenant à $[0,1]$ on a $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1$.

/1
3. Sans chercher à calculer directement la valeur de I_n, calculer $I_0 + I_1 + I_2$.

/0.5+/0.5
4. Etudier, pour $n \geq 0$ et $x \in [0,1]$, le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire par intégration que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

/0.5+/0.5+/0.5
5. Démontrer que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in [0,1]$ on a $0 \leq f_n(x) \leq x^n$. En déduire par intégration l'encadrement $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis (en utilisant le théorème des gendarmes) la limite de la suite (I_n).

/1.5
6. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \geq 0$ on a
$$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 g(x)x^{n+1}dx.$$

/1+/0.5
7. En utilisant l'encadrement de la question 2., démontrer que pour tout $n \geq 0$ on a
$$\frac{1}{3(n+2)} \leq \int_0^1 g(x)x^{n+1}dx \leq \frac{1}{n+2},$$
puis en déduire que
$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$