Examen Analyse 2

2012-2013

Exercice 1:

1) On a pour $n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt{n^2+5n+18} - n$$

$$= \frac{n^2+5n+18-n^2}{\sqrt{n^2+5n+18}+n}$$

$$= \frac{5n+18}{\sqrt{n^2+5n+18}+n}$$

$$= \frac{n(5+18/n)}{n(\sqrt{1+5/n+18/n^2}+1)}$$

$$= \frac{5+18/n}{\sqrt{1+5/n+18/n^2}+1}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{5}{\sqrt{1}+1} = \frac{5}{2}$$ donc u_n converge

Et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{5}{2}$

2) On a par le critère de d'Alembert pour $n \geq 1$:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)^3} \times \frac{n^3}{(-3)^n}\right|$$

$$= \frac{3^{n+1}}{3^n} \times \frac{n^3}{(n+1)^3} = \frac{3}{(1+1/n)^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3 > 1$$

Donc la série de terme général $u_n = \frac{(-3)^n}{n^3}$ est divergente

3) On a par IPP: $\int_0^1 x e^{3x} dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)\,dx$

$f(x) = x \quad g'(x) = e^{3x}$

$f'(x) = 1 \quad g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$

$$= \left[x\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{e^{3x}}{3}\,dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^1$$

$$= e^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

4) a) On a :

$u(x) = x^2$
$u'(x) = 2x$
$f(u) = \sin u$
$a=0,\ b=\sqrt{\pi}$
$u(a)=0,\ u(b)=\pi$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{u'(x)}{2}\times f(u(x))\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(u)\,du$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin u\,du$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\cos u\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2}(-\cos\pi + \cos 0) = 1.$$

b) On a :

$x = \cos u = \varphi(u)$
$x \in [0;\frac{1}{2}] \iff u \in [\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$
sur $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$, φ est $\searrow$ strictement
car $(\cos') = -\sin < 0$ donc
cos est bijective sur $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$.
donc on peut appliquer la formule de substitution.
$\varphi'(u) = -\sin u$.
$a = 0$, $b = 1/2$
$\varphi^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi^{-1}(1/2) = \pi/3$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin u}{\sqrt{1-\cos^2 u}}\,du$$
$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sqrt{\sin^2 u}}\,du \quad \text{car } \cos^2 u + \sin^2 u = 1.$$
$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\sin u}}{\cancel{\sin u}}\,du \quad \text{car } \sin > 0 \text{ sur } \left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} 1\,du$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - 2\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

5) a) Soit $0 < \varepsilon < 1$. On a :

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\varepsilon}^{1}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon} - 1 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} +\infty$$

Donc $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ n'existe pas.

b) Soit $n > e$. On a :

$$\int_1^n x^{-2x}\,dx = \int_1^n e^{-2x\ln x}\,dx$$
$$\leq \int_1^e 1\,dx + \int_e^n e^{-2x}\,dx$$
$$\leq (e-1) + \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_e^n$$
$$\leq e - 1 + \frac{e^{-2e}}{2} - \frac{e^{-2n}}{2}$$
$$\leq e - 1 + \frac{e^{-2e}}{2}$$

car $\ln x \geq 1$ pour $x \geq e$
donc $-2x\ln x \leq -2x$ pour $x \geq e$
et $x^{-2x\ln x} \leq 1$ pour $1 \leq x \leq e$

Donc $\int_1^{+\infty} x e^{-2x}\,dx$ existe.

c) Soit $n > 1$. On a :

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^n = \ln n - \ln 1$$
$$= \ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ n'existe pas.

6) On pose $\begin{cases} f_1(x_1,x_2,x_3) = x_2 \cos(x_1 x_3) \\ f_2(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1} \ln x_2 \sqrt{x_3} \end{cases}$ et on a : $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$

On a : $$\mathrm{Jac}\, f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_2 x_3 \sin(x_1 x_3) & \cos(x_1 x_3) & -x_1 x_2 \sin(x_1 x_3) \\ e^{x_1} \ln x_2 \sqrt{x_3} & \frac{e^{x_1}\sqrt{x_3}}{x_2} & \frac{e^{x_1} \ln x_2}{2\sqrt{x_3}} \end{bmatrix}$$

Exercice 2 :

1) On a : $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy-y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\right) e^{-y^2}$$
$$= \frac{\partial (xy)}{\partial x} e^{xy} e^{-y^2}$$
$$= y\, e^{xy-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy-y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy-y^2\right) e^{xy-y^2}$$
$$= (x-2y)\, e^{xy-y^2}$$

D'où $$\mathrm{grad}\, f = \begin{pmatrix} y\, e^{xy-y^2} \\ (x-2y)\, e^{xy-y^2} \end{pmatrix}$$

2) $\operatorname{grad} f = 0 \iff \begin{cases} y\,e^{xy-y^2} = 0 \\ (x-2y)\,e^{xy-y^2} = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

$\iff x = y = 0$

Donc $\Omega = (0,0)$

3) On a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(y\,e^{xy-y^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\right) y\,e^{-y^2}$

$= \dfrac{\partial}{\partial x}(xy)\; e^{xy}\; y\,e^{-y^2}$

$= y^2\, e^{xy-y^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left((x-2y)\,e^{xy-y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x-2y)\,e^{xy-y^2} + (x-2y)\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy-y^2}\right)$$

$= -2\,e^{xy-y^2} + (x-2y)^2\,e^{xy-y^2}$

$= \left((x-2y)^2 - 2\right) e^{xy-y^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\,e^{xy-y^2}\right) = \frac{\partial (y)}{\partial y}\, e^{xy-y^2} + y\,\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy-y^2}\right)$$

$= e^{xy-y^2} + y(x-2y)\,e^{xy-y^2}$

$= (1 + xy - 2y^2)\, e^{xy-y^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x-2y)e^{xy-y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x-2y)\,e^{xy-y^2} + (x-2y)\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy-y^2}\right)$$

$= e^{xy-y^2} + (x-2y)\,y\,e^{xy-y^2}$

$= (1 + xy - 2y^2)\, e^{xy-y^2}$

Donc on a bien $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

4) On a: $g(y) = f(0,y) = e^{-y^2}$

$$g'(y) = -2y\, e^{-y^2}$$

$$g''(y) = (-2)e^{-y^2} + (-2y)\times(-2y)e^{-y^2}$$

$$= (-2 + 4y^2)\, e^{-y^2}.$$

$g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

$g''(0) = -2e^0 < 0$ donc 0 est un maximum local pour g.

5) On a: $h(y) = f(2y,y) = e^{y^2}$

$$h'(y) = 2y\, e^{y^2}$$

$$h''(y) = 2e^{y^2} + (2y)(2y)e^{y^2}$$

$$= (2 + 4y^2)\, e^{y^2}$$

$h'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$h''(0) = 2e^0 > 0$ donc 0 est un minimum local pour h.

6) Finalement, le point $\Omega = (0,0)$ n'est ni un maximum ni un minimum pour f car d'après 4) et 5), on ne peut à la fois être maximum et minimum. On dit que Ω est un point selle.