

EXAMEN D'ANALYSE 2

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

/12

Exercice 1 - Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

/1.5 1. Déterminer si la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n^2 + 5n + 18} - n$ converge, et si oui calculer sa limite.

/1 2. Déterminer si la série $\sum \frac{(-3)^n}{n^3}$ est convergente ou divergente.

/1.5 3. En intégrant par parties, calculer $\int_0^1 x e^{3x} dx$.

4. En utilisant la formule de substitution, calculer les intégrales suivantes :

/1.5 (a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx$.

/2 (b) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, en posant $x = \cos u$.

5. Etudier si les intégrales généralisées suivantes convergent ou non (sans les calculer) :

/2 · 0.5 + 1 + 0.5 (a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ (b) $\int_1^{+\infty} x^{-2x} dx$ (c) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

6. Calculer la matrice jacobienne $[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]_{i,j}$ de la fonction suivante (en précisant son ensemble de définition) :

/2,5

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 \cos(x_1 x_3), e^{x_1} \ln(x_2) \sqrt{x_3}).$$

/8

Exercice 2 - Dans cet exercice on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = e^{xy-y^2}.$$

/2 1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f , c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. En déduire le gradient de f .

/0.5 2. Démontrer que le gradient ne s'annule qu'en un seul point, qu'on notera M .

/3 3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f , c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

/1 4. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(y) = f(0, y)$. Déterminer les extrema de g . Quelle pourrait être la nature du point critique M pour f ?

/1 5. Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(y) = f(2y, y)$. Déterminer les extrema de h . Quelle pourrait être la nature du point critique M pour f ?

/0.5 6. Quelle est finalement la nature du point critique M pour f ?