EXAMEN D'ANALYSE 1 – DEUXIÈME SESSION

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

18

Exercice 1 -

13: 0.5 + 1.5 + 0.5
1.5

1. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty, -5, 1, +\infty$, où $f(x) = \frac{x^2-25}{x^2+4x-5}$.
2. Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\sqrt{x^2+5x+2} - \sqrt{x^2+2x+5}$.
3. Démontrer que la fonction g définie comme suit est continue en 0 :

1.5

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} + (2x+1)^2 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

12: 10.5 + 1.5
D.A. l'

4. En notant $h(x) = x^2\sqrt{1+\ln x}$, calculer la dérivée de h en précisant le domaine de définition de h , celui de h' , et en pensant bien à décomposer le calcul.

12

Exercice 2 -

Partie A Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

15

$$f(x) = e^{2x}(e^x - 2)^2.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

10.5

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (b) Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de f .

10.5

(a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

1.5

$$f'(x) = 4e^{2x}(e^x - 1)(e^x - 2).$$

1

(b) Dresser le tableau de variations de f .

1.5

3. Donner suivant la valeur de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans $\mathbb{R}$.

Partie B Notons F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

17

$$F(x) = \frac{1}{12}(e^x - 2)^2(3e^{2x} - 4e^x - 4),$$

et Γ sa courbe représentative.

12

1. (a) Calculer $F'(x)$ et vérifier que $F'(x) = f(x)$.

10.5

(b) Vérifier que $F(\ln 2) = 0$.

1.5: 1 + 0.5
+∞ -∞

(c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Démontrer que Γ admet une asymptote horizontale en $-\infty$ et en donner une équation.

1

(d) Dresser le tableau de variations de F .

1

2. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et Γ . Pour cela, on pensera à étudier le signe de $F - f$.

1

3. Tracer $\mathcal{C}$ et Γ .