

Exercice 1:

$$(a) E = \left\{ x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } x = \frac{1}{n+2} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$ et que $\frac{1}{n+2} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

donc: $\max E = \frac{1}{2}$ $\min E$ n'existe pas

$\sup E = \frac{1}{2}$ $\inf E = 0$.

(b) $F = \{ x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 6 \leq 0 \}$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) = 25.$$

$$x = \frac{-(-1) \pm 5}{2} = 3 \text{ ou } -2. \quad \text{donc } x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x-3$	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+
x^2-x-6	+	0	-	+

Donc $x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 3]$.

D'où $F = [-2, 3]$

On en déduit: $\min F = \inf F = -2$
 $\max F = \sup F = 3$

Exercice 2:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + x - 2}$$

On factorise en haut et en bas:

$$\bullet \quad x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-8) = 36$$

$$x = \frac{-(-2) \pm 6}{2} = 4 \text{ ou } -2$$

$$\text{donc } x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$$

$$\bullet \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 9$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2 \text{ ou } 1$$

$$\text{donc } x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

$$\text{Finalement, } f(x) = \frac{(x-4)(\cancel{x+2})}{(\cancel{x+2})(x-1)} = \frac{x-4}{x-1}$$

$$\bullet \text{ en } \pm \infty : \text{ on a } f(x) = \frac{x-4}{x-1} = \frac{\cancel{x}(1-4/x)}{\cancel{x}(1-1/x)} = \frac{1-4/x}{1-1/x}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 1 \text{ car } \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} 0$$

$$\bullet \text{ en } -2 : \text{ on a } f(-2) = \frac{-2-4}{-2-1} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$$

$$\bullet \text{ en } 1 : \text{ on a : } f(x) = \frac{x-4}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x-4 = -3 < 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad f(x) &= \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+1} \\
 &= \frac{(\sqrt{x^2+2x+3})^2 - (\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+2x+3} + \sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{x^2+2x+3 - (x^2+1)}{\sqrt{x^2+2x+3} + \sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3} + \sqrt{x^2+1}}
 \end{aligned}$$

(quantité conjuguée)

donc en $\pm\infty$, on a:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x(2+2/x)}{|x|(\sqrt{1+2/x+3/x^2} + \sqrt{1+1/x^2})} \\
 &= \operatorname{sgn}(x) \frac{(2+2/x)}{\sqrt{1+2/x+3/x^2} + \sqrt{1+1/x^2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1 \times 2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 1 \quad \text{car } \frac{1}{x} \text{ et } \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1 \times 2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -1 \quad \text{car } \frac{1}{x} \text{ et } \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

Exercice 3:

On sait que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

f est continue en 0 ssi $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ existent et sont égales.

$$\text{On a: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a+x) = a$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = 0 \quad \text{car } \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

donc f est continue en 0 ssi $a=0$.

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$ si $a=0$.

Exercice 4:

(a) $D_f = \mathbb{R}_+$

$$f(x) = \ln(1+\sqrt{x}) = u(v(x)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = 1+\sqrt{x} \end{cases}$$

On calcule : $u'(x) = \frac{1}{x}$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

et on a : $f'(x) = (u \circ v)'(x)$

$$= u'(v(x)) \times v'(x)$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x+2\sqrt{x}}$$

(b) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$g(x) = \frac{e^x + 2}{x^2 - 1} = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = e^x + 2 \\ v(x) = x^2 - 1 \end{cases}$$

On calcule : $u'(x) = e^x$

$$v'(x) = 2x$$

et on a : $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$$= \frac{e^x(x^2-1) - (e^x+2)2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^2e^x - e^x - 2xe^x - 4x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{(x^2-2x-1)e^x - 4x}{(x^2-1)^2}$$

$$(c) D_h = \mathbb{R}$$

$$h(x) = (x+2)e^{x^2} = u(x) \times v(x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = x+2 \\ v(x) = e^{x^2} \end{cases}$$

$$\text{On calcule: } u'(x) = 1$$

$$v(x) = U(V(x)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U(x) = e^x \\ V(x) = x^2 \end{cases}$$

$$\text{donc } u'(x) = e^x$$

$$V'(x) = 2x$$

$$\text{et } v'(x) = (U \circ V)'(x) = U'(V(x)) \times V'(x)$$

$$= e^{x^2} \times 2x$$

$$\text{Donc } h'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$= 1 \times e^{x^2} + (x+2) 2x e^{x^2}$$

$$= (2x^2 + 4x + 1)e^{x^2}$$