Corrigé de l'examen d'analyse 1

Exercice 1 :

1) On commence par factoriser le numérateur et le dénominateur :

- $3x^2-5x-2=0$

$\Delta=(-5)^2-4\times3\times(-2)=25+24=49=7^2$

$x=\dfrac{5\pm7}{2\times3}=2$ ou $-\dfrac{1}{3}$

donc $3x^2-5x-2=3(x-2)(x+\frac{1}{3})$

- $x^2+x-6=0$

$\Delta=1^2-4\times1\times(-6)=1+24=25=5^2$

$x=\dfrac{-1\pm5}{2}=-3$ ou 2

donc $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

finalement, $f(x)=\dfrac{3\cancel{(x-2)}(x+1/3)}{(x+3)\cancel{(x-2)}}=\dfrac{3(x+1/3)}{(x+3)}$

On a donc en $\pm\infty$:

$$f(x)=\frac{3(x+1/3)}{(x+3)}=\frac{3\cancel{x}(1+1/3x)}{\cancel{x}(1+3/x)}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}3\times\frac{(1+0)}{(1+0)}=3$$

Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=3$

De même, en 2, on a : $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\dfrac{3\times(2+1/3)}{(2+3)}=\dfrac{3\times7/3}{5}=\dfrac{7}{5}$

Enfin, en -3, on a :

$\lim\limits_{x\to-3^-}f(x)=\dfrac{3\times(-3+1/3)}{0^-}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-3^+}f(x)=\dfrac{3\times(-3+1/3)}{0^+}=-\infty$

2) On a quand $x \to +\infty$:

$$\sqrt{x^2+x+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + x} \quad \text{(quantité conjuguée)}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + x + 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+1} + x}$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + x}$$

$$= \frac{\cancel{x}\,(1 + 1/x)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1 + 1/x + 1/x^2} + 1\right)}$$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{(1+0)}{\sqrt{1+0+0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \frac{1}{2}$.

3) On sait que f est continue en 0 ssi $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ existent et sont égales à $f(0) = 1$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ par définition.

On va calculer la limite en 0^+ :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x \ln x + e^x\right) = 0 + e^0 = 1$$

car $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ par croissance comparée.

Donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ Finalement, f est continue en 0.

4) $D_h = \mathbb{R}_+$

$D_{h'} = \mathbb{R}_+^*$ par les thm de composition

On a : $h(x) = u(x)\, v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = e^{\sqrt{x}} \end{cases}$

Donc $h'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Or, $u'(x) = 1$ et calculons $v'(x)$:

$v(x) = a \circ b(x)$ avec $\begin{cases} a(x) = e^{x} \\ b(x) = \sqrt{x}. \end{cases}$

Donc $v'(x) = b'(x) \times a' \circ b(x)$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}}$ car $\begin{cases} a'(x) = e^{x} \\ b'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

D'où $h'(x) = 1 \times e^{\sqrt{x}} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

$= e^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right) = e^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$ car $D_h = \mathbb{R}_+^*$.

$= e^{\sqrt{x}} \frac{(2+\sqrt{x})}{2}$

On remarque que $\lim_{x \to 0^+} h'(x) = e^{0} \times \frac{(2+0)}{2} = 1$ donc h' est défini en 0^+ d'où $D_{h'} = \mathbb{R}_+$

Exercice 2 :

Partie A

1) Pour $x \to +\infty$, on a : $g(x) = 2e^{x} + 2x - 7$

$= e^{x}\left(2 + \frac{2x}{e^{x}} - \frac{7}{e^{x}}\right)$

$\xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \times (2 + 0 + 0)$ par croissance comparée

donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Pour $x \to -\infty$, on a :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (2e^x + 2x - 7) = 2 \times 0 + 2(-\infty) - 7$$
$$= -\infty$$

2) g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a : $g'(x) = 2e^x + 2 > 0$

Donc g est croissante strictement sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
g'		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Comme g est continue, strictement croissante et $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) < 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) > 0 \end{cases}$,

on sait que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ (que l'on notera α) par le thm des valeurs intermédiaires.

De plus, $g(0) = 2e^0 + 2 \times 0 - 7 = -5 < 0$

et $g(1) = 2 \times e^1 + 2 - 7 \approx 2 \times 2.72 + 2 - 7$

$\approx 0.44 > 0$

Donc par le thm des valeurs intermédiaires, on sait qu'en fait :

$0 < \alpha < 1$.

4) On en déduit d'après les questions A2) et A3) que :

$g(x) > 0$ pour $x > \alpha$

$g(x) < 0$ pour $x < \alpha$

Partie B

1) On a : • $2x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{2}$

• $1 - e^{-x} = 0 \iff e^{-x} = 1$

$\iff e^{x} = 1$

$\iff x = 0$

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$5/2$		$+\infty$
$2x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$1-e^{-x}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) On a :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x-5)(1-e^{-x}) = (2\times(-\infty)-5)(1-\infty)$$

$$= (-\infty)\times(-\infty)$$

$$= +\infty$$

et $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x-5)(1-e^{-x}) = (2\times\infty-5)(1-0)$$

$$= +\infty$$

3) On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x}) = u(x)v(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x-5 \\ v(x) = 1-e^{-x} \end{cases}$

On, $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$

Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$= 2\times(1-e^{-x}) + (2x-5)\times e^{-x}$$

$$= 2 - 2e^{-x} + 2xe^{-x} - 5e^{-x}$$

$$= 2 + 2xe^{-x} - 7e^{-x}$$

$$= e^{-x}(2e^{x} + 2x - 7)$$

$$= e^{-x}g(x)$$

D'où f' et g ont le même signe car $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

4)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5) On sait d'après A3) que $2e^{\alpha} + 2\alpha - 7 = 0$

d'où $2e^{\alpha} = -2\alpha + 7$

soit $e^{\alpha} = \dfrac{-2\alpha+7}{2}$

donc $e^{-\alpha} = \dfrac{2}{-2\alpha+7}$.

En remplaçant dans l'expression de f:

$$f(\alpha) = (2\alpha-5)(1-e^{-\alpha}) = (2\alpha-5)\left(1-\frac{2}{-2\alpha+7}\right) = (2\alpha-5)\left(\frac{-2\alpha+7-2}{-2\alpha+7}\right)$$

$$f(\alpha) = (2\alpha-5)\left(\frac{-2\alpha+5}{-2\alpha+7}\right)$$

$$= (2\alpha-5)\,\frac{(2\alpha-5)}{(2\alpha-7)}$$

$$= \frac{(2\alpha-5)^2}{(2\alpha-7)}$$

6) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-5}{x}\right)(1-e^{-x})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2-\frac{5}{x}\right)(1-e^{-x})$$

$$= (2-0)(1-0)$$

$$= 2$$

D'où en $+\infty$:

$$f(x)-2x = (2x-5)(1-e^{-x})-2x$$

$$= \cancel{2x} - 2xe^{-x} - 5 + 5e^{-x} - \cancel{2x}$$

$$= -2xe^{-x} - 5 + 5e^{-x}$$

$$\xrightarrow[x\to+\infty]{} -2\times 0 - 5 + 5\times 0$$ par croissance comparée

Donc $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = -5$.

D'où $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = 2x-5$.

On a donc :

$$f(x) - (2x-5) = -2x e^{-x} + 5 e^{-x}$$
$$= (5-2x)\, e^{-x}$$

Or, $5 - 2x > 0 \iff \frac{5}{2} > x$

$5 - 2x = 0 \iff x = \frac{5}{2}$

$5 - 2x < 0 \iff \frac{5}{2} < x$

et $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$

Donc $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se croisent en $x = \frac{5}{2}$.

$\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ pour $x < 5/2$

$\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{D}$ pour $x > 5/2$

7)