EXAMEN D'ANALYSE 1

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

18

Exercice 1 -

/3 : /0.5 + /1 + /1 + /0.5 ($-\infty$, -3, 2, $+\infty$)

1. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, -3, 2, $+\infty$, où $f(x) = \frac{3x^2-5x-2}{x^2+x-6}$.

/1.5

2. Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\sqrt{x^2+x+1} - x$.
3. Démontrer que la fonction f définie par

/1.5

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x) + e^x \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

est continue en 0.

4. En notant

$$h(x) = xe^{\sqrt{x}},$$

/2 : /0.5 + /1.5 (Def, h')

calculer la dérivée de h en précisant le domaine de définition de h, celui de h', et en pensant bien à décomposer le calcul.

/12

Exercice 2 - Dans cet exercice on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x-5)(1-e^{-x}).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

Partie A /3.5

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

/0.5

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

/1 : /0.5 + /0.5 (sens de var, tableau)

2. Etudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

/1.5 : /1 + /0.5 (α, $0<\alpha<1$)

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α, et qu'on a $0 < \alpha < 1$. *On rappelle que $e \simeq 2,72$, et on admettra que $\alpha \simeq 0,94$.*

/0.5

4. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B /8.5

/1

1. Etudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.

/1

2. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

/2 : /1.5 + /0.5 (f', m signe)

3. Calculer $f'(x)$, et vérifier que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

/0.5

4. Dresser le tableau de variations de f.

/1

5. Démontrer l'égalité $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$, où le nombre α a été construit à la question 3 de la partie A. *On admettra que $f(\alpha) \simeq -1,90$.*

/2 : /1.5 + /0.5 ($\mathcal{D}$, position)

6. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ en $+\infty$, et en donner une équation. Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$. *Indication : pour cela on étudiera le signe de $f(x) - (ax+b)$, où $y = ax+b$ est une équation de $\mathcal{D}$.*

/1

7. Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$.