EXAMEN – DEUXIÈME SESSION

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.

Exercice 1 - Donner l'ensemble des solutions du système linéaire suivant, en les écrivant comme somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène associé :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 5 \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$$

Exercice 2 - On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + 7z, 3x - 4y + 5z).$$

a) Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques.

b) Donner une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$. Calculer son rang, et en déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im} f$.

c) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker} f$. L'application f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 3 - Dans cet exercice, on considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Démontrer que A est inversible, et calculer son inverse à l'aide du pivot de Gauss.
2. En déduire la solution du système linéaire $\begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ 5x - 2y + 7z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$

Exercice 4 - Déterminer les valeurs réelles de c pour lesquelles la matrice suivante est inversible :

$$\begin{bmatrix} 4 & c-2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & c & 1 \\ 4 & c & 3 & 2 \\ c+1 & c-1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 5 - Considérons la matrice suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer la matrice adjointe de B.
2. En déduire l'inverse de B.

Exercice 6 - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de y dans la solution du système linéaire suivant : $\begin{cases} x + z = 2 \\ 3x + y + 4z = 5 \\ -2x + y - 3z = 4 \end{cases}$