Corrigé de l'examen

Exercice 1 :

On a : (S) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

On lui associe la matrice suivante à laquelle on applique le pivot de Gauss :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2+3L_1 \\ L_3+L_1 \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2/7 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3-7L_2 \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1-2L_2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a donc deux variables principales (x_1 et x_2) et deux paramètres (x_3 et x_4)

donc une infinité de solutions.

D'où $\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = x_3 - x_4 \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Soit $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$ avec $s, t \in \mathbb{R}$

Donc $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ base de l'espace des solutions.

Exercice 2 :

a) On calcule l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$f(1,0,0) = (2\times 1 - 3\times 0 + 0,\ 5\times 1 - 0 - 2\times 0,\ 4\times 1 + 7\times 0 - 7\times 0)$$
$$= (2,5,4)$$

$$f(0,1,0) = (2\times 0 - 3\times 1 + 0,\ 5\times 0 - 1 - 2\times 0,\ 4\times 0 + 7\times 1 - 7\times 0)$$
$$= (-3,-1,7)$$

$$f(0,0,1) = (2\times 0 - 3\times 0 + 1,\ 5\times 0 - 0 - 2\times 1,\ 4\times 0 + 7\times 0 - 7\times 1)$$
$$= (1,-2,-7)$$

Donc la matrice de f dans les bases canoniques est :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 4 & 7 & -7 \end{bmatrix}$$

b) On sait que $\mathrm{Im} = \left\langle f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

donc une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$ est $\left\{ \begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-1\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-7\end{pmatrix} \right\}$.

On calcule donc le rang de cette famille à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

$$\begin{array}{c|ccc} & C_1 & C_2 & C_3 \\ \hline L_1 & 2 & -3 & 1 \\ L_2 & 5 & -1 & -2 \\ L_3 & 4 & 7 & -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C_1 - 2C_3 & C_2 + 3C_3 & \\ \hline 0 & 0 & \boxed{1} \\ 9 & -7 & -2 \\ 18 & -14 & -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 0 & \boxed{1} \\ L_2 + 2L_1 & 9 & -7 & 0 \\ L_3 + 7L_1 & 18 & -14 & 0 \end{array}$$

$$L_3 - 2L_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 + \frac{7}{9}C_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2/9 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc Im f est de rang 2 (car on a deux "pivots" dans la dernière matrice)

Comme $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit qu'ils forment une base de Im f et $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

c) Par le thm du rang, on sait que :

$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 3$ donc $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f$

$= 3 - 2$

$= 1$

L'application n'est pas injective car $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ ($\dim \operatorname{Ker} f = 1$)

et l'application n'est pas surjective car $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$ ($\dim \operatorname{Im} f = 2$)

Exercice 3:

1) On calcule l'inverse de A grâce au pivot de Gauss (s'il existe !) :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 + L_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_3+4L_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

$$-L_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 6 & -4 & -5 \end{array}\right]$$

$$L_1-L_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 4 & 0 & -5 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 6 & -4 & -5 \end{array}\right]$$

$$L_1-4L_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 6 & -4 & -5 \end{array}\right]$$

Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

2) On a alors : $\begin{cases} x+4y+z=-3 \\ -x+y=1 \\ 2x+4y+z=0 \end{cases} \iff AX=B$ avec $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\iff X = A^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)\times(-3)+0\times 1+1\times 0 \\ (-1)\times(-3)+1\times 1+1\times 0 \\ 6\times(-3)+(-4)\times 1+(-5)\times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -22 \end{bmatrix}$$

donc le système a un solution unique $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=-22 \end{cases}$

Exercice 4 :

On sait qu'une matrice est inversible ssi son déterminant est non-nul.

Calculons donc en fonction de c le déterminant de cette matrice :

$$\det\left(\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{bmatrix} 2 & c+2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & c-1 \\ c & 0 & c & c \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}} \end{array}\right)$$

$$= \det\left(\begin{array}{cccc} & & C_3-C_1 & C_4-C_1 \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{bmatrix} 2 & c+2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & c-1 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}} \end{array}\right)$$

$$= c \times (-1)^{3+1} \times \det\left(\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} c+2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & c-1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}} \end{array}\right)$$

$$= c \times \det\left(\begin{array}{ccc} C_1-2C_2 & & C_3+2C_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} c+4 & -1 & -4 \\ -5 & 2 & c+3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \end{array}\right)$$

$$= c \times 1 \times (-1)^{3+2} \times \det\left(\begin{bmatrix} c+4 & -4 \\ -5 & c+3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -c \times \left((c+4)\times(c+3) - (-5)(-4)\right)$$

$$= -c\left(c^2+3c+4c+12-20\right)$$

$$= -c\left(c^2+7c-8\right)$$

On résoud : $c^2+7c-8=0$

$\Delta = 7^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 49 + 32 = 81$

$c = \dfrac{-7 \pm 9}{2 \times 1} = 1$ ou -8 donc $c^2+7c-8 = (c-1)(c+8)$.

Donc $\det\left([\dots]\right) = -c(c-1)(c+8)$

Ainsi, cette matrice est inversible si $-c(c-1)(c+8) \neq 0$

$\Leftrightarrow c \neq 0,\ c \neq 1$ et $c \neq -8$

Exercice 5:

1) On a :

$$\operatorname{adj} B = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} (2\times 0-(-3)\times(-1)) & -((-1)\times 0-3\times(-3)) & ((-1)\times(-1)-3\times 2) \\ -(0\times 0-(-1)\times(-1)) & (2\times 0-3\times(-1)) & -(2\times(-1)-3\times 0) \\ (0\times(-3)-2\times(-1)) & -(2\times(-3)-(-1)\times(-1)) & 2\times 2-(-1)\times 0 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -9 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -9 & 3 & 7 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2) Calculons d'abord

$$\det B = \det\left(\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{array}{c} C_1+2C_3 \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -7 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-1)\times(-1)^{1+3}\times \det\left(\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det B = -\left((-7)\times(-1) - 2\times 3\right)$$
$$= -1$$

Finalement, comme $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B}\,\mathrm{adj}\, B$, on a :

$$B^{-1} = -\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -9 & 3 & 7 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 9 & -3 & -7 \\ 5 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Exercice 6 :

On a : $\begin{cases} 3y + 2z = -5 \\ -x + 2y + 4z = -2 \\ -2x + y + 5z = 3 \end{cases} \iff AX = B$ avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

D'après Cramer, on sait que $z = \dfrac{\det A_3}{\det A}$ où $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Calculons donc $\det A_3$ et $\det A$:

$$\det A_3 = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}_{L_3 - 2L_2}\right)$$
$$= (-1)\times(-1)^{2+1}\times\det\left(\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\right) = 3\times 7 - (-3)\times(-5) = 6$$

$$\det A = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}_{L_3 - 2L_2}\right)$$
$$= (-1)\times(-1)^{2+1}\times\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\right) = 3\times(-3) - (-3)\times 2 = -3$$

Donc $z = \dfrac{6}{-3} = -2$