

EXAMEN

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.

Exercice 1 - Donner une base de l'espace des solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 - On considère l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, 5x - y - 2z, 4x + 7y - 7z).$$

a) Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques.

b) Donner une famille génératrice de $\text{Im} f$. Calculer son rang, et en déduire une base et la dimension de $\text{Im} f$.

c) En déduire la dimension de $\text{Ker} f$. L'application f est-elle injective? Surjective?

Exercice 3 - Dans cet exercice, on considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Démontrer que A est inversible, et calculer son inverse à l'aide du pivot de Gauss.

2. En déduire la solution du système linéaire $\begin{cases} x + 4y + z = -3 \\ -x + y = 1 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$

Exercice 4 - Déterminer les valeurs réelles de c pour lesquelles la matrice suivante est inversible :

$$\begin{bmatrix} 2 & c+2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & c-1 \\ c & 0 & c & c \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 5 - Considérons la matrice suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer la matrice adjointe de B .

2. En déduire l'inverse de B .

Exercice 6 - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de z dans la solution du

système linéaire suivant : $\begin{cases} 3y + 2z = -5 \\ -x + 2y + 4z = -2 \\ -2x + y + 5z = 3 \end{cases}$