

EXAMEN D'ANALYSE 2

DEUXIÈME SESSION

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 - Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$ on a

$$\sum_{k=0}^n (3k) = \frac{3}{2}n(n+1).$$

2. (a) En intégrant par parties, calculer $\int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx$.
 (b) En utilisant la formule de substitution, calculer $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.
3. (a) Démontrer que la fonction suivante admet une asymptote oblique quand $x \rightarrow +\infty$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$$

(on pensera à utiliser la quantité conjuguée).

- (b) Donner un équivalent simple quand $x \rightarrow +\infty$ de la fonction $g(x) = (x+1)^2$.
4. (a) Calculer le développement de Taylor-Young à l'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction $f(x) = \ln(1+3x)$.
 (b) Calculer le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en $x = 0$ de la fonction $g(x) = e^{-2x}$.
5. Calculer la matrice jacobienne $[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}]_{i,j}$ de la fonction suivante (en précisant son ensemble de définition) :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 \cos(x_1 + x_2), e^{x_2} \ln(1+x_3) \sqrt{x_1+2}).$$

Exercice 2 - Dans cet exercice on considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = (e^{xy} - 2)^2 + (y - 1)^2.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f , c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. En déduire le gradient de f .
2. Démontrer que le gradient de f ne s'annule qu'au point $M = (\ln(2), 1)$. (Indication : démontrer que $y = 0$ ne convient pas)
3. Démontrer que $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et en déduire que M est un minimum global de f . Est-ce le seul ?
4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f , c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.