Univ. Paris VIII, 2011-2012

Examen d'Analyse 2

Deuxième Session

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

/12.5 **Exercice 1 -** Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$ on a

/2

$$\sum_{k=0}^{n}(3k) = \frac{3}{2}n(n+1).$$

/1

/1

2. (a) En intégrant par parties, calculer $\int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx$.

   (b) En utilisant la formule de substitution, calculer $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

3. (a) Démontrer que la fonction suivante admet une asymptote oblique quand $x \to +\infty$:

/1.5

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x}$$

   (on pensera à utiliser la quantité conjuguée).

/1

   (b) Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$ de la fonction $g(x) = (x+1)^2$.

/1.5

4. (a) Calculer le développement de Taylor-Young à l'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction $f(x) = \ln(1+3x)$.

/1.5

   (b) Calculer le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en $x = 0$ de la fonction $g(x) = e^{-2x}$.

/3

5. Calculer la matrice jacobienne $[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}]_{i,j}$ de la fonction suivante (en précisant son ensemble de définition) :

$$f(x_1,x_2,x_3) = \Big(x_3\cos(x_1+x_2), e^{x_2}\ln(1+x_3)\sqrt{x_1+2}\Big).$$

/7.5 **Exercice 2 -** Dans cet exercice on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \Big(e^{xy}-2\Big)^2 + \Big(y-1\Big)^2.$$

/2.5

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. En déduire le gradient de f.

/1

2. Démontrer que le gradient de f ne s'annule qu'au point $M = (\ln(2), 1)$. (Indication : démontrer que $y = 0$ ne convient pas)

/0.5

3. Démontrer que $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, et en déduire que M est un minimum global de f. Est-ce le seul ?

/3.5

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f, c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.