Partiel d'Analyse 2

Exercice 1

1) (H_n) $\sum_{k=0}^{n}(2k) = n(n+1)$ pour $n \geq 0$.

initialisation: pour $n=0$

On a: $\sum_{k=0}^{0}(2k) = 2\times 0 = 0$

et $0\times(0+1) = 0$

Donc (H_0) est vraie

hérédité: Soit $n\geq 0$. On suppose que (H_n) est vraie.

Montrons (H_{n+1}).

On a: $\sum_{k=0}^{n+1}(2k) = \sum_{k=0}^{n}(2k) + 2\times(n+1)$.

$= n(n+1) + 2(n+1)$ par hypothèse de récurrence

$=(n+1)(n+2)$

Donc (H_{n+1}) est vraie.

Finalement, on a montré par récurrence que (H_n) est vraie $\forall n\geq 0$.

2) (a) pour $n\geq 0$, on a: $u_n = \dfrac{n^2-2n+3}{n^2+1} = \dfrac{\cancel{n^2}(1-2/n+3/n^2)}{\cancel{n^2}(1+1/n^2)}$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Donc (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(b) Comme $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$, on sait que $\left(-\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0+4 = 4$.

(c) pour $n \geq 0$, on a : $u_n = \dfrac{3n^2-2}{n+5} = \dfrac{n^2(3-2/n^2)}{n(1+5/n)}$

$$= n \frac{(3-2/n^2)}{(1+5/n)}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

donc (u_n) ne converge pas et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) (a) Pour $n \geq 1$, on a : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{\sqrt{n+1}\; e^{-(n+1)}}{\sqrt{n}\; e^{-n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}\; e^{-1}$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}$$

Donc par le critère de d'Alembert, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{1}{e} < 1$,

la série de t.g. $(\sqrt{n}\, e^{-n})$ converge.

(b) pour $n \geq 1$, on a : $|u_n|^{1/n} = \left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{n}} = \dfrac{\cancel{n}(2+1/n)}{\cancel{n}(3+2/n)}$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}$$

Donc par le critère de Cauchy, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|^{1/n} = \dfrac{2}{3} < 1$,

la série de t.g. $\left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n$ converge.

(c) Pour $n \geq 1$, on a : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{3^n} = 3 \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$$

Donc par le critère de d'Alembert, comme $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 3 > 1$,

la série de t.g. $\left(\frac{3^n}{n^2}\right)$ diverge.

4) On a par IPP : $\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx = \left[x(-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-e^{-x})\, dx$

où $f'(x) = e^{-x}$, $f(x) = -e^{-x}$
$g(x) = x$, $g'(x) = 1$

$$= -\frac{1}{e} + \int_0^1 e^{-x}\, dx$$

$$= -\frac{1}{e} + \left[-e^{-x}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

5) On pose $u(x) = x^2+1$ et on a : $u'(x) = 2x$.

Donc $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\, dx.$

$$= \left[\sqrt{u(x)}\right]_0^2 \quad \left(\text{car } \left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\right)$$

$$= \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^2 = \sqrt{5} - 1.$$

6) (a) Soit $0 < \varepsilon < 1$. On a : $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 2$

Donc $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$ donc $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge.

(b) On a pour $x \geq 1$:

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{et pour} \quad n \geq 1, \int_1^n \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ est absolument convergente donc convergente.

(c) Soit $0 < \varepsilon < 1$: On a : $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \left[\ln x\right]_\varepsilon^1 = -\ln \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} +\infty$

Donc $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ est divergente.

Exercice 2 :

1) On a : $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} 1\, dx = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^1(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2}$$
$$= 0 - (-1) = 1.$$

2) (a) Sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, on a : $(\sin)'(x) = \cos x \geq 0$.

Donc la fonction sinus est croissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Donc $\sin 0 \leq \sin x \leq \sin \frac{\pi}{2}$ soit $0 \leq \sin x \leq 1$. $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}]$

(b) Comme $0 \leq \sin x \leq 1$ pour $x \in [0;\frac{\pi}{2}]$,

On a : $0 \leq \sin^n(x) \leq 1$ pour $x \in [0;\frac{\pi}{2}]$ donc $\sin^n(x) \geq 0$.

(5)

Donc en multipliant l'inégalité de 2a) par $\sin^n x$, on a :

$0 \leq \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x) \quad \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

(c) Comme l'intégration conserve le sens des inégalités, on a :

$$\int_0^{\pi/2} 0 \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{(n+1)}(x) \, dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \, dx$$

soit $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$

(d) On sait par 2)(c) que (I_n) est décroissante et minorée par 0

donc (I_n) converge.

3) On a par IPP : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{(n-1)}(x) \sin(x) \, dx$

où $f'(x) = \sin x \quad f(x) = -\cos x$

$g(x) = \sin^{n-1}(x) \quad g'(x) = (n-1) \cos x \sin^{n-2}(x)$

$$= \left[\sin^{(n-1)}(x) \times (-\cos x) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n-1) \cos x \sin^{n-2}(x)(-\cos x) \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x) \cos^2(x) \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x) (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= (n-1) \left[\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x) \, dx - \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \, dx \right]$$

$$= (n-1) \left(I_{n-2} - I_n \right)$$

D'où $I_n + (n-1) I_n = (n-1) I_{n-2}$ soit $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

4) Pour $n=0$: $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ donc $I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$

et $\frac{\pi}{2\times(0+1)} = \frac{\pi}{2}$ donc la formule marche pour $n=0$.

Pour $n=1$: $I_1 = 1$

$I_2 = \frac{2-1}{2} \times I_{2-2}$ (par 3))

$= \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}$

Donc $I_1 I_2 = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2(1+1)} = \frac{\pi}{4}$ donc la formule marche pour $n=1$

5) Comme (I_n) converge par 2) d), on note l sa limite

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\pi}{2(n+1)} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n I_{n+1} = 0$ (par 4))

et $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n I_{n+1} = l^2$

Donc $l^2 = 0$ soit $l = 0$.