PARTIEL D'ANALYSE 2

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

/12

Exercice 1 - Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

/2.5

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$ on a
$$\sum_{k=0}^{n}(2k) = n(n+1).$$

/1.5

2. Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, dire si elle converge et si oui déterminer sa limite :
$$(a)\ u_n = \frac{n^2 - 2n + 3}{n^2 + 1} \qquad (b)\ u_n = \left(\frac{-1}{4}\right)^n + 4 \qquad (c)\ u_n = \frac{3n^2 - 2}{n + 5}$$

/1.5

3. Pour chacune des séries suivantes, déterminer si elle est convergente ou divergente :
$$(a)\ \sum \sqrt{n}e^{-n} \qquad (b)\ \sum \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n \qquad (c)\ \sum \frac{3^n}{n^2}$$

/2

4. En intégrant par parties, calculer $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

/2.5

5. En utilisant la formule de substitution, calculer $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

6. Etudier si les intégrales généralisées suivantes convergent ou non (sans les calculer) :

/0.5 + /1 + /0.5
$$(a)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \qquad (b)\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}dx \qquad (c)\ \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

/8

Exercice 2 - Pour tout entier $n \geq 0$ on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$.

/1.5

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Dans cette question on va démontrer que la suite (I_n) converge.

/0.5

   (a) Démontrer que la fonction sinus est croissante sur $[0, \pi/2]$ et en déduire que pour tout $x \in [0, \pi/2]$ on a $0 \leq \sin(x) \leq 1$.

   (b) En déduire que pour tout $x \in [0, \pi/2]$ et pour tout $n \geq 0$ on a :

/0.5
$$0 \leq \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x).$$

/0.5

   (c) En déduire par intégration que $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

/0.5

   (d) Conclure en démontrant que la suite (I_n) converge.

/2

3. Soit $n \geq 2$. En écrivant $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(x)\sin(x)dx$ et en intégrant par parties, démontrer que $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$ (on pourra utiliser la formule trigonométrique $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$).

/1.5

4. Vérifier que la formule $I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$ est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (on pensera à calculer I_2 grâce à la question 3). *Dans la suite, on admet que cette formule est vraie pour tout $n \geq 0$.*

/1

5. En notant ℓ la limite de la suite (I_n), démontrer que $\ell = 0$. Pour cela on utilisera la relation $I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$ admise à la question 4.