

Corrigé de l'examen d'Analyse 2

①

Exercice 1:

1) On pose: $(H_n) \quad \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1, n \geq 0.$

initialisation: $n=0$

$$\text{On a: } \sum_{k=0}^0 2^k = 2^0 = 1$$

$$\text{et } 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Donc (H_0) est vraie.

hérédité: Soit $n \geq 0$. On suppose (H_n) vraie. Montrons (H_{n+1}) .

$$\text{On a: } \sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^n 2^k + 2^{n+1}$$

$$= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \text{ par hypothèse de réc}$$

$$= 2 \times 2^{n+1} - 1$$

$$= 2^{n+2} - 1$$

Donc (H_{n+1}) est vraie

Finalement, (H_n) est vraie pour tout $n \geq 0$.

2) a) On a: $\int_0^1 x \ln x = \left[\frac{x^2}{2} \times \ln x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx$
par IPP en posant

$f'(x) = x$	$f(x) = \frac{x^2}{2}$
$g(x) = \ln x$	$g'(x) = \frac{1}{x}$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 x dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{4}$$

(2)

$$b) \text{ On a : } \int_0^{\sqrt{2}} x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} 2x e^{x^2} dx$$

$$\text{exposant } u(x) = x^2$$

$$u'(x) = 2x$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} u'(x) e^{u(x)} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{u(x)} \right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$3) a) \text{ On calcule d'abord : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} (1 + 2/x + 1/x^2)}{\cancel{x^2} (1 - 2/x)} \quad \begin{matrix} \nearrow 0 & \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{matrix}$$

$$= 1.$$

$$\text{On calcule ensuite } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x-2} - x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1 - x(x-2)}{x-2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cancel{x^2} + 2x + 1 - \cancel{x^2} + 2x}{x-2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x + 1}{x-2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cancel{x} (4 + 1/x)}{\cancel{x} (1 - 2/x)} \right) \quad \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{matrix} = 4.$$

Donc $f(x)$ admet pour asymptote oblique quand $x \rightarrow +\infty$ la droite d'équation: $y = x + 4$.

$$\begin{aligned} 3) \text{ quand } x \rightarrow 0, \text{ on a: } g(x) &= \sqrt{1+x} - 1 = \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1^2}{\sqrt{1+x} + 1} \\ &= \frac{1+x-1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1} \end{aligned}$$

et on sait que $\sqrt{1+x} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$,

donc $\frac{g(x)}{(x/2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ donc $g(x) \sim \frac{x}{2}$ par def.

$$\begin{array}{ll} 4) \text{ a) On a: } f(x) = \cos(5x) & f(0) = 1 \\ f'(x) = -5 \sin(5x) & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -5^2 \cos(5x) & f''(0) = -25 \\ f'''(x) = 5^3 \sin(5x) & f'''(0) = 0. \end{array}$$

Donc $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + x^3 \varepsilon(x)$

$$\begin{aligned} &= 1 + x \times 0 + \frac{x^2}{2} \times (-25) + \frac{x^3}{6} \times 0 + x^3 \varepsilon(x) \\ &= 1 - \frac{25}{2} x^2 + x^3 \varepsilon(x). \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

b) On a: $g(x) = \sqrt{1-2x}$

$g(0) = 1$

$$g'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

$g'(0) = -1$

$$= (-1)(1-2x)^{-1/2}$$

$$g''(x) = (-1) \times (-2) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (1-2x)^{-3/2}$$

$g''(0) = -1$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-2x}(1-2x)} = (-1)(1-2x)^{-3/2}$$

$$g'''(x) = (-1) \times (-2) \times \left(-\frac{3}{2}\right) (1-2x)^{-5/2}$$

$g'''(c) = \frac{-3}{(1-2c)^{5/2}}$

$$= \frac{-3}{\sqrt{1-2x}(1-2x)^2} = (-3)(1-2x)^{-5/2}$$

Donc $g(x) = g(0) + \frac{x}{1!} g'(0) + \frac{x^2}{2!} g''(0) + \frac{x^3}{3!} g'''(c)$

avec c compris entre 0 et x .

$$= 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} (1-2c)^{-5/2}$$

5) On a: $D_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et on a $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

et
$$\text{Jac } f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x_2+x_3} & \frac{x_2}{x_1 x_3} \\ x_1 e^{x_2+x_3} & \frac{\ln x_1}{x_3} \\ x_1 e^{x_2+x_3} & -\frac{x_2 \ln x_1}{x_3^2} \end{bmatrix}$$

Exercice 2:

(5)

1) $Df = \mathbb{R}^2$ car $x^2 + y^2 \geq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial \ln(1+x^2+y^2)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} \\ &= \frac{2x}{1+x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial \ln(1+x^2+y^2)}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} \\ &= \frac{2y}{1+x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \text{grad } f = \begin{pmatrix} 2x/(1+x^2+y^2) \\ 2y/(1+x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

$$3) \text{ On a: } \text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2+y^2} \\ \frac{2y}{1+x^2+y^2} \end{pmatrix} \quad \text{donc } \text{grad } f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2+y^2} = 0 \\ \frac{2y}{1+x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=0.$$

Ainsi $\pi(0,0)$.

4) g est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a: $g'(z) = \frac{1}{1+z} > 0$ pour $z > 0$
donc g est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc le minimum de g est atteint en $z=0$ et c'est un minimum global.

$$\text{On remarque que } g(x^2+y^2) = f(x, y).$$

et on sait que g atteint son minimum en 0 donc le minimum de f est atteint en $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$ soit en π qui était le seul candidat possible par 3). Donc π est un minimum global pour f .

(6)

5) Oma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2x) \times (1+x^2+y^2) - 2x \times \frac{\partial}{\partial x}(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2(1+x^2+y^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2 - 2x^2 + 2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{1+x^2+y^2} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2y) \times (1+x^2+y^2) - 2y \times \frac{\partial}{\partial y}(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x(1+x^2+y^2) - 2y \times 2y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2 + 2x^2 - 2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{1+x^2+y^2} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2y) (1+x^2+y^2) - 2y \times \frac{\partial}{\partial x}(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{0 \times (1+x^2+y^2) - 2y \times 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2x) \times (1+x^2+y^2) - 2x \times \frac{\partial}{\partial y}(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{0 \times (1+x^2+y^2) - 2x \times 2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

⑦

On a donc bien: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$

(On le savait déjà grâce au thm de Schwarz).

6) On a:

$$\begin{aligned} g(z) &= \ln(1+z) & g(0) &= 0 \\ g'(z) &= \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} & g'(0) &= 1 \\ g''(z) &= (-1)(1+z)^{-2} = \frac{-1}{(1+z)^2} & g''(0) &= -1. \end{aligned}$$

Donc $g(z) = g(0) + \frac{z}{1!} g'(0) + \frac{z^2}{2!} g''(0) + z^2 \varepsilon(z)$ avec $\varepsilon(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$

$$= z - \frac{z^2}{2} + z^2 \varepsilon(z).$$

7) On déduit de 6) que $f(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} + (x^2 + y^2) \varepsilon(x,y)$
quand $(x,y) \rightarrow (0,0)$

donc

$$\frac{f(x,y)}{x^2 + y^2} = 1 - \frac{(x^2 + y^2)}{2} + (x^2 + y^2) \varepsilon(x,y)$$

$$\xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1.$$

Donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1.$