

EXAMEN D'ANALYSE 2

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 - Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$ on a

/2
$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

- /1 2. (a) En intégrant par parties, calculer $\int_0^1 x \ln(x) dx$.

- /1 (b) En utilisant la formule de substitution, calculer $\int_0^{\sqrt{2}} x e^{x^2} dx$.

3. (a) Démontrer que la fonction suivante admet une asymptote oblique quand $x \rightarrow +\infty$:

/1.5
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 2}.$$

- /1 (b) Donner un équivalent simple quand $x \rightarrow 0$ de la fonction $g(x) = \sqrt{1+x} - 1$ (on pensera à utiliser la quantité conjuguée).

- /1.5 4. (a) Calculer le développement de Taylor-Young à l'ordre 3 en $x = 0$ de la fonction $f(x) = \cos(5x)$.

- /1.5 (b) Calculer le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en $x = 0$ de la fonction $g(x) = \sqrt{1-2x}$.

- /2.5 5. Calculer la matrice jacobienne $[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}]_{i,j}$ de la fonction suivante (en précisant son ensemble de définition) :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 e^{x_2+x_3}, \frac{x_2 \ln x_1}{x_3} \right).$$

(/8) **Exercice 2** - Dans cet exercice on considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2).$$

- /0.5 1. Donner l'ensemble de définition de f .

- /2 2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f , c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. En déduire le gradient de f .

- /0.5 3. Démontrer que le gradient ne s'annule qu'en un seul point, qu'on notera M .

- /1.5 4. Soit g la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $g(z) = \ln(1+z)$. Etudier le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$, et en déduire que M est un minimum global de f .

- /2 5. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f , c'est-à-dire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

- /1 6. Calculer le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 en $z = 0$ de la fonction g définie à la question 4.

- /0.5 7. En déduire la limite de $\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ quand $(x,y) \rightarrow (0,0)$.