Corrigé du partiel d'Analyse 1

Exercice 1 :

1) $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x = 3 - \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$

$= \{3 - \frac{2}{1}, 3 - \frac{2}{2}, 3 - \frac{2}{3}, 3 - \frac{2}{4}, \dots\}$

$\min E = \inf E = 1$

$\max E$ n'existe pas

$\sup E = 3$

2) On a : $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$

On factorise d'abord f.

$x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = (-1)^2 + 4 \times 6 = 25$

$x = \dfrac{1 \pm 5}{2} = -2$ ou 3

donc $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

$x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = 1^2 + 4 \times 2 = 9$

$x = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = -2$ ou 1

donc $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

d'où $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{x-3}{x-1}$

Quand $x \to \pm\infty$, $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1} = \dfrac{\cancel{x}(1 - \overset{\to 0}{3/x})}{\cancel{x}(1 - \underset{\to 0}{1/x})} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \dfrac{1}{1}$

donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

En $x = -2$, $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x-3}{x-1} = \dfrac{-2-3}{-2-1} = \dfrac{5}{3}$

En $x \to 1$, on remarque que $f(x) \times (x-1) \xrightarrow[x \to 1]{} 1 - 3 = -2 < 0$

donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

3) Quand $x \to 2$,

$$\frac{\sqrt{3x+3}-3}{x-2} = \frac{(\sqrt{3x+3}-3)(\sqrt{3x+3}+3)}{(x-2)(\sqrt{3x+3}+3)}$$

$$= \frac{3x+3-3^2}{(x-2)(\sqrt{3x+3}+3)}$$

$$= \frac{3x-6}{(x-2)(\sqrt{3x+3}+3)}$$

$$= \frac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{3x+3}+3)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x+3}-3}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} = \frac{3}{\sqrt{3\times 2+3}+3} = \frac{1}{2}$

4) $D_h = \mathbb{R}+$

On remarque que h est de la forme $h = uv$

avec $u(x) = x$
$v(x) = e^{\sqrt{x}}$

donc $u'(x) = 1$ et v est de la forme $v = U \circ V$

avec $U(x) = \exp(x)$
$V(x) = \sqrt{x}$

donc $U'(x) = \exp(x)$
$V'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ d'où $v'(x) = (U \circ V)'(x) = V'(x) \times U' \circ V(x)$
$= \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

donc $h'(x) = (uv)'(x) = u'v(x) + uv'(x)$

$$= 1 \times e^{\sqrt{x}} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$= e^{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

Exercice 2 :

1) a) ϕ est continue et dérivable sur $[2;+\infty[$ comme composée de fonctions continues et dérivables.

On a alors $\forall x \in [2;+\infty[$,

$$\phi'(x) = 1 - \frac{2}{x} \geq 0$$

donc ϕ est croissante strictement sur cet intervalle

On a : $\lim\limits_{x \to 2} \phi(x) = 2-2-2\ln 2 = -2\ln 2$

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 2 - 2\ln x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\Big(1 - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} - 2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\Big) \quad \text{par croissance comparée}$$

$$= +\infty$$

D'où le tableau

x	2		$+\infty$
ϕ'		$+$	
ϕ	$-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

b) On sait que ϕ est continue, strictement croissante sur $[2;+\infty[$, que $\phi(2) = -2\ln 2 < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi(x) = +\infty$, donc par le thm des valeurs intermédiaires il existe un unique $\alpha \in [2;+\infty[$ tq $\phi(\alpha) = 0$.

c) On en déduit :

$\phi(x) < 0$ quand $2 \leq x < \alpha$

$\phi(x) = 0$ si $x = \alpha$

$\phi(x) > 0$ quand $x > \alpha$

2) f est continue et dérivable sur $]2;+\infty[$ comme composée de fonctions continues et dérivables.

On a : $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x \ln x$, $v(x) = x - 2$

Donc comme $u = UV$ avec $U(x) = x$, $U'(x) = 1$, $V(x) = \ln x$, $V'(x) = 1/x$

on a : $u'(x) = (UV)'(x) = U'V(x) + UV'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x}$
$= \ln x + 1$

et $v'(x) = 1$

donc $f'(x) = \left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'v(x) - uv'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{(\ln x + 1)(x-2) - (x \ln x) \times 1}{(x-2)^2}$

$= \dfrac{\cancel{x \ln x} + x - 2\ln x - 2 - \cancel{x \ln x}}{(x-2)^2}$

$= \dfrac{\phi(x)}{(x-2)^2}$

Comme $(x-2)^2 > 0$, f' est du même signe que ϕ sur $]2;+\infty[$.
Donc f croissante strictement sur $]\alpha;+\infty[$ et décroissante strictement sur $]2;\alpha[$.
On en déduit :

x	2		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ car $x \ln x \xrightarrow[x \to 2]{} 2\ln 2 > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \ln x}{x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{1 - 2/x} = +\infty$ (avec $1 - 2/x \to 1$)

3) a) On a :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (T_{x_0})$$

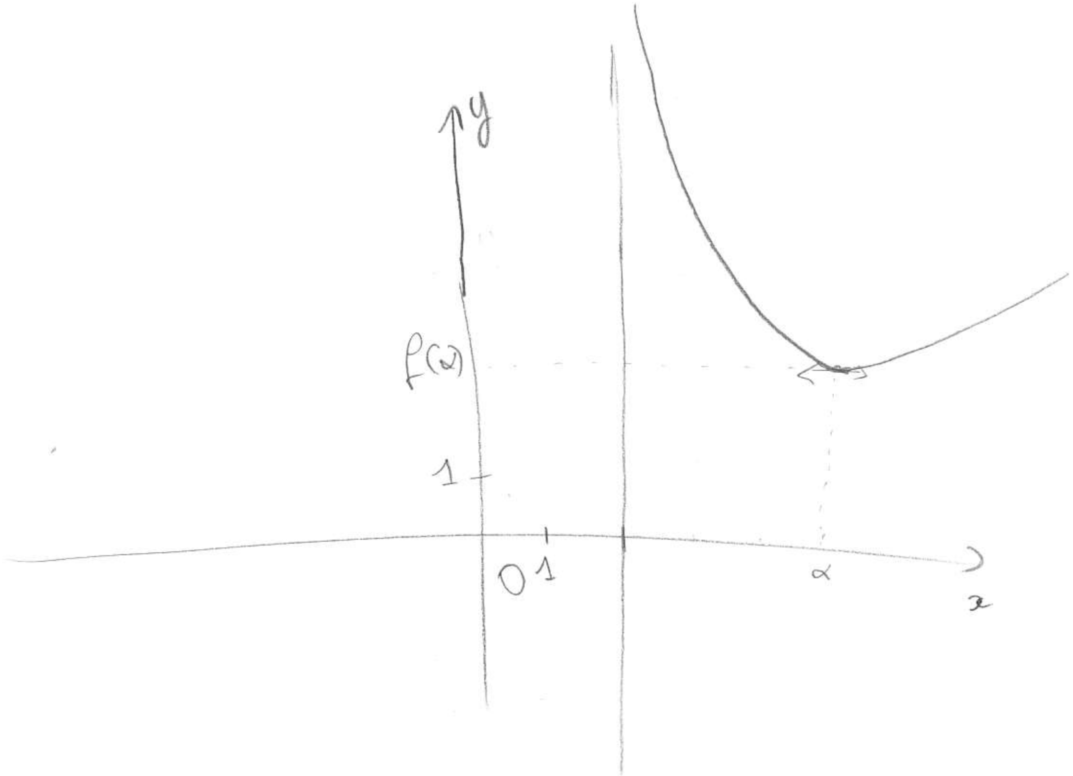
b) On sait que $(T_{x_0}) // (Ox) \iff f'(x_0) = 0$.

et $f'(x_0) = 0$ a une unique solution $x_0 = \alpha > 2$.

(voir 1b) et 2)

Donc $(T_{x_0}) // (Ox) \iff x_0 = \alpha$.

4)



On a montré en 2) que f admettait une tangente verticale en $x = 2$.

et en 3) b) que la tangente en α était parallèle à (Ox).