Partiel d'Analyse 1. Durée : 2h.

Documents et matériel électronique interdits.

NB : le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 - (8 points) Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

/1 1. Posons $E = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x = 3 - \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer, si ils existent, le maximum, le minimum, la borne supérieure et la borne inférieure de E.

/3 2. Soit $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, -2, 1 et $+\infty$.

/2 3. Calculer la limite de $\frac{\sqrt{3x+3}-3}{x-2}$ quand x tend vers 2.

/2 4. Calculer la dérivée de la fonction $h(x) = xe^{\sqrt{x}}$ en précisant l'ensemble de définition de cette dérivée.

Exercice 2 - (12 points) Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f définie sur $]2, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{x-2}.$$

1. Dans cette question, on étudie la fonction auxiliaire ϕ définie sur $[2, +\infty[$ par

$$\phi(x) = x - 2 - 2\ln(x).$$

/3 (a) Etudier les variations de la fonction ϕ, puis dresser son tableau de variation en précisant les limites de ϕ aux bornes de son domaine de définition.

/2 (b) En déduire que ϕ s'annule exactement une fois sur l'intervalle $[2, +\infty[$. Dans la suite, on notera α l'unique réel appartenant à $[2, +\infty[$ tel que $\phi(\alpha) = 0$, et on admettra que $\alpha \approx 5,35$.

/2 (c) Déduire des questions précédentes le signe de la fonction ϕ sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

Dans la suite de ce problème, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative (dans un repère orthonormal) de la fonction f définie au début.

/2 2. Démontrer que la dérivée f' de f a le même signe que ϕ sur $]2, +\infty[$. En déduire les variations de f, puis tracer le tableau de variation de f.

3. Dans cette question on s'intéresse aux tangentes à la courbe $\mathcal{C}$.

/1 (a) Donner (sans démonstration) l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0.

/1 (b) On rappelle que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0 est parallèle à l'axe des abscisses si, et seulement si, on a $f'(x_0) = 0$. Démontrer qu'il existe un unique $x_0 > 2$ tel que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0 soit parallèle à l'axe des abscisses.

/1 4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$. On précise à cet effet que $f(\alpha) \approx 2,68$.