Corrigé de l'examen d'analyse 1

Exercice 1:

1) quand $x \to \pm\infty$, $\dfrac{x^2-x-2}{2x^2+x-1} = \dfrac{\cancel{x^2}(1-\underbrace{1/x}_{\to 0}-\underbrace{2/x^2}_{\to 0})}{\cancel{x^2}(2+\underbrace{1/x}_{\to 0}-\underbrace{1/x^2}_{\to 0})} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \dfrac{1}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

En $x \to -1$, on a "$\dfrac{0}{0}$" forme indéterminée

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-2 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^2-x & x-2 \\ \hline -2x-2 & \\ +2x+2 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 2x^2+x-1 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x^2-2x & 2x-1 \\ \hline -x-1 & \\ +x+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$ et $2x^2+x-1 = (x+1)(2x-1)$

donc quand $x \to -1$, $f(x) = \dfrac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}(2x-1)} \xrightarrow[x\to -1]{} \dfrac{-3}{-3} = 1$

d'où $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$

Enfin, quand $x \to \dfrac{1}{2}$, on a: $f(x) = \dfrac{x-2}{2x-1}$

donc $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ car $x-2 \xrightarrow[x\to\frac{1}{2}]{} -\dfrac{3}{2} < 0$.

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$

2) $D_g = [0;+\infty[$

On a: $g(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{\ln u(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \sqrt{x}+1$

$= \dfrac{U(x)}{u(x)}$ avec $U(x) = \ln u(x)$

Donc $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $U'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{1/2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2x+2\sqrt{x}}$

et $g'(x) = \left(\frac{U}{u}\right)'(x) = \frac{U'(x)\,u(x) - U(x)\,u'(x)}{u(x)^2}$

$$= \frac{\frac{1}{2x+2\sqrt{x}} \times (\sqrt{x}+1) - \ln(\sqrt{x}+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{1-\ln(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2}$$

3) $D_h = \mathbb{R}$.

On calcule la dérivée de h : $h'(x) = 2\times(x+1)^2 + (2x-3)\times 2(x+1)$

$= 2\left[(x+1)+(2x-3)\right](x+1)$

$= 2(3x-2)(x+1)$

Donc $h'(x)=0 \iff x=\frac{2}{3}$ ou $x=-1$.

Calculons maintenant la dérivée seconde de h :

$h''(x) = 2\times 3\times (x+1) + 2\times(3x-2)\times 1$

$= 12x+2$

En $x=\frac{2}{3}$, $h'(x)=0$ et $h''(x)=10>0$ donc $\frac{2}{3}$ est un minimum.

En $x=-1$, $h'(x)=0$ et $h''(x)=-10<0$ donc -1 est un maximum.

h		-1		$2/3$	
h'	$+$	Φ	$-$	Φ	$+$
h	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{125}{27}$	$\nearrow +\infty$

Ce sont donc des extrema locaux car $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $h(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.

4) $D_p = \mathbb{R}$.

On calcule la dérivée seconde de p:

$$p'(x) = \left(\sqrt{u(x)}\right)' \quad \text{avec } u(x) = x^2+1$$

$$= \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

$$= \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} \quad \text{car } u'(x) = 2x.$$

$$p''(x) = \left(\frac{U}{V}\right)'(x) = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V(x)^2} \quad \text{avec } U(x) = x, \; V(x) = \sqrt{x^2+1} = p(x)$$

$$= \frac{1 \times \sqrt{x^2+1} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} \quad \text{car } U'(x) = 1, \; V'(x) = p'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)}$$

donc, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p''(x) > 0$, p est convexe.

exercice 2:

A) 1) Comme g est dérivable comme composée de fonctions dérivables, on calcule g'.

$$g'(x) = 1 - e^x$$

donc $g'(x) = 0 \iff 1 - e^x = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$.

donc $g'(x) > 0$ pour $x > 0$ donc g est croissante sur $[0;+\infty[$.

En $x \to +\infty$, on a: $g(x) = x+2-e^x = e^x\left(\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{\to 0 \text{ par croissance comparée}} + \overbrace{\frac{2}{e^x}}^{\to 0} - 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2) On sait que g est continue comme composée de fonctions continues sur $[0;+\infty[$.

Donc par le thm des valeurs intermédiaires, comme g est continue, strictement croissante sur $[0;+\infty[$, $g(0)=1>0$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty < 0$

il existe un unique $a \in]0;+\infty[$ tq $g(a)=0$.

3) On a : $g(1) = 3-e > 0$ car $e \approx 2.71$.
$g(2) = 4-e^2 < 0$ car $e \approx 2.71$.

Donc par le tvi, $1<a<2$.

4)

x	0		a		$+\infty$
g		$+$	0	$-$	

B) 1) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.

$$f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1} = \frac{U(x)}{V(x)} \quad \text{avec} \quad U(x) = e^x - 1, \quad V(x) = xe^x+1.$$

On a : $U'(x) = e^x$ et $V'(x) = 1\times e^x + x\times e^x = (x+1)e^x$

d'où
$$f'(x) = \left(\frac{U}{V}\right)'(x) = \frac{U'(x)V(x)-U(x)V'(x)}{V(x)^2} = \frac{e^x(xe^x+1)-(e^x-1)(x+1)e^x}{(xe^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x\left[\cancel{xe^x}+1-\cancel{xe^x}-e^x+x+1\right]}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x(x+2-e^x)}{(xe^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

Donc f' et g ont le même signe sur $[0;+\infty[$

On en déduit que f est croissante strictement sur $[0;a]$.

et f est strictement décroissante sur $[a;+\infty[$.

2) On a pour tout $x \geq 0$: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \dfrac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(x + e^{-x})}$

$$= \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}.$$

Donc quand $x \to +\infty$, $f(x) = \dfrac{1 - \overbrace{e^{-x}}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $(\mathscr{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation

$y = 0$ en $+\infty$.

3) D'après A)2) on sait que $g(a) = 0$ donc $a + 2 - e^a = 0$ soit $e^a = a + 2$

D'où $f(a) = \dfrac{e^a - 1}{ae^a + 1} = \dfrac{(a+2) - 1}{a(a+2) + 1} = \dfrac{a+1}{a^2 + 2a + 1} = \dfrac{(a+1)}{(a+1)^2} = \dfrac{1}{a+1}$.

C) 1) L'équation de la tangente (T) est donnée par :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$= 1 \times x + 0 \qquad \text{car } f'(0) = 1,\ f(0) = 0.$$
$$y = x$$

2) On a : $f(x) - x = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \dfrac{e^x - 1 - x(xe^x + 1)}{xe^x + 1}$

$$= \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1}$$

$$= \frac{e^x(1 - x^2) - (1 + x)}{xe^x + 1} = \frac{(1-x)(1+x)e^x - (1+x)}{xe^x + 1}$$

donc $f(x) - x = \dfrac{(1+x)\left[e^x - xe^x - 1\right]}{xe^x+1} = \dfrac{(1+x)\,u(x)}{xe^x+1}$

3) Comme u est dérivable comme composée de fonctions dérivables, on a :

$u'(x) = e^x - (1 \times e^x + x \times e^x) = e^x - e^x - xe^x$

$= -xe^x > 0$ pour $x > 0$.

Donc $u(x)$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Comme $u(0) = 0$, $u(x) < 0$ pour $x > 0$

4) On en déduit que $f(x) - x < 0$ pour $x > 0$

donc $f(x) < x$ donc $(\mathcal{C})$ est au dessous de (T)

5)