

EXAMEN D'ANALYSE 1

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 -

(18)

- /2 1. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, -1 , $\frac{1}{2}$, $+\infty$, où $f(x) = \frac{x^2-x-2}{2x^2+x-1}$.
 2. En notant

/2
$$g(x) = \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}$$

calculer la dérivée de g en précisant son domaine de définition et en pensant bien à décomposer le calcul.

- /2 3. Trouver les extrema éventuels de la fonction $h(x) = (2x-3)(x+1)^2$ et en déterminer la nature.

- /2 4. Etudier la convexité de la fonction $p(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 - On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$.

- /1 1. Etudier le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$, et déterminer la limite de g en $+\infty$.
 /1 2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. On note a cette solution.
 /1 3. Prouver que $1 < a < 2$. On rappelle que $e \approx 2.71$. On admettra que $a \approx 1.14$.
 /1 4. Dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$.

Partie B

- /1 1. Montrer que, pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$; en déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.
 /1 2. Montrer que, pour tout réel positif x , on a $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$; en déduire la limite de f en $+\infty$, et l'existence d'une asymptote à la courbe (C) . Préciser l'équation de cette asymptote.
 /1 3. Montrer que $f(a) = \frac{1}{a+1}$, où a est défini à la question A.2. On admettra que $f(a) \approx 0.47$.

Partie C

- /1 1. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
 /1 2. Etablir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$, on a $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ avec $u(x) = e^x - xe^x - 1$.
 /1 3. Etudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et en déduire le signe de $u(x)$.
 /1 4. Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T) .
 /1 5. Tracer (C) et (T) .