

EXAMEN
DEUXIÈME SESSION

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.

Exercice 1 - Résoudre à l'aide du pivot de Gauss le système linéaire suivant, en fonction du paramètre réel a :

$$\begin{cases} x + ay - z = -1 \\ x + 3y - z = 1 \\ 2x + 4y + az = 2 \end{cases}$$

Exercice 2 - Dans cet exercice, on considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

1. Démontrer que A est inversible, et calculer son inverse à l'aide du pivot de Gauss.

2. En déduire une solution du système linéaire $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2x + y + 5z = 2 \\ 3y + 5z = -3 \end{cases}$

Exercice 3 - Déterminer les valeurs réelles de c pour lesquelles la matrice suivante est non-singulière :

$$\begin{bmatrix} c-2 & -3 & 1 & 2 \\ c & -c & c & 0 \\ -2 & 0 & c-1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 - Considérons la matrice suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Calculer la matrice adjointe de B .

2. En déduire l'inverse de B .

Exercice 5 - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de z dans la solution du système linéaire suivant : $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -y + z = 3 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$

Exercice 6 - Démontrer que l'ensemble $\{(x, |x|), x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.