

Corrigé de l'examen d'algèbre linéaire

①

exercice 1:

$$\begin{cases} x+ay+2z=-2 \\ ax+y-z=1 \\ -x+y-z=0 \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & a & 2 & -2 \\ a & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\longleftrightarrow \begin{matrix} L_2 - aL_1 \\ L_3 + L_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & a & 2 & -2 \\ 0 & 1-a^2-1-2a & 1+2a & 1+2a \\ 0 & 1+a & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\longleftrightarrow \begin{matrix} L_3 \\ L_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & a & 2 & -2 \\ 0 & 1+a & 1 & 2 \\ 0 & 1-a^2-1-2a & 1+2a & 1+2a \end{array} \right] \quad \text{car } 1-a^2 = (1-a)(1+a)$$

$$\longleftrightarrow \begin{matrix} L_3 - (1-a)L_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & a & 2 & -2 \\ 0 & 1+a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2-a & 3 \end{array} \right]$$

Si $a \neq -1$ et $a \neq -2$, on a trois pivots donc une solution unique.

$$\begin{matrix} L_2/(1+a) \\ L_3/(-2-a) \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & a & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{1+a} & \frac{-2}{1+a} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{-2-a} \end{array} \right]$$

$$\longleftrightarrow \begin{matrix} L_1 - 2L_3 \\ L_2 - \frac{L_3}{1+a} \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & a & 0 & -\frac{2-2a}{2+a} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1+2a}{(1+a)(2+a)} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{2+a} \end{array} \right]$$

$$\longleftrightarrow \begin{matrix} L_1 - aL_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1+2a}{(1+a)(2+a)} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{2+a} \end{array} \right] \quad \text{si } a \neq -1 \text{ et } a \neq -2 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{1+a} \\ y = -\frac{1+2a}{(1+a)(2+a)} \\ z = -\frac{3}{2+a} \end{cases}$$

Si $a = -2$, on a:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -2 \\ 0 & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix} \text{ donc le système n'a aucune solution.}$$

Si $a = -1$, on a:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \leftarrow \\ L_3 + L_2 \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \text{ donc le système n'a aucune solution.}$$

exercice 2:

$$1) L_1 \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ L_2 & 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ L_3 & 1 & 0 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ L_3 - L_1 & 0 & 1 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ L_3 - L_2 & 0 & 0 & -1 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -L_3 & 0 & 0 & \boxed{1} & | & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

donc A est inversible

$$\begin{array}{l} L_1 - 3L_3 \\ L_2 - 2L_3 \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & | & -2 & -3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & | & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\leftarrow L_1 + L_2 \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & | & -4 & -4 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & | & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{donc } A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2)

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ x + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

exercice 3:

On sait qu'une matrice est non singulière si son déterminant est non nul. Calculons donc son déterminant:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & c & c+1 \\ -2 & 3 & c & -1 \\ 1 & c-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & c & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & c & c+1 \\ L_2 - L_1 & -3 & 5 & -c-2 \\ 1 & c-1 & 0 & 2 \\ L_4 - L_1 & -1 & 3 & -c+1 \end{array} \right)$$

$$= c \times (-1)^{1+3} \times \det \left(\begin{bmatrix} -3 & 5 & -c-2 \\ 1 & c-1 & 2 \\ -1 & 3 & -c+1 \end{bmatrix} \right)$$

(4)

$$= c \times \det \begin{pmatrix} L_1+3L_2 & \begin{pmatrix} 0 & 3c+2 & -c+4 \end{pmatrix} \\ L_3+L_2 & \begin{pmatrix} 1 & c-1 & 2 \\ 0 & c+2 & -c+3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= c \times 1 \times (-1)^{2+1} \times \det \begin{pmatrix} 3c+2 & -c+4 \\ c+2 & -c+3 \end{pmatrix}$$

$$= -c \times [(3c+2)(-c+3) - (c+2)(-c+4)]$$

$$= -c [-3c^2 + 9c - 2c + 6 + c^2 - 4c + 2c - 8]$$

$$= -c [-2c^2 + 5c - 2]$$

$$= 2c [2c^2 - 5c + 2]$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9$$

$$c = \frac{5 \pm 3}{4} = 2 \text{ ou } \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \det \left(\begin{pmatrix} \end{pmatrix} \right) = c \times 2 \times (c-2) \left(c - \frac{1}{2} \right)$$

donc la matrice est inversible si $c \neq 0, 2 \text{ ou } \frac{1}{2}$.

exercice 4:

$$\begin{aligned} 1) \quad \text{adj } B &= \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(5)

2) Calculons maintenant $\det B$:

$$\det B = \det \begin{pmatrix} \overset{C_1 - C_2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= (-1) \times (-1)^{2+2} \times \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -((-1) \times 2 - 3 \times (-1))$$

$$= -1$$

$$\text{d'où } B^{-1} = \frac{1}{\det B} \operatorname{adj} B = - \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

exercice 5:

$$\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 2 \\ -x + 2y + 3z = -1 \\ x + 3y + 7z = 1 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad AX = B$$

avec $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\text{on sait que } y = \frac{\det A_2}{\det A}$$

$$\text{On } \det A_2 = \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -3 & \overset{C_2 - C_1}{5} & 2 \\ -1 & \overset{C_2 - C_1}{0} & 3 \\ 1 & \overset{C_2 - C_1}{0} & 7 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

(6)

$$\det A_2 = 5 \times (-1)^{1+2} \times \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= -5 \times ((-1) \times 7 - 1 \times 3)$$

$$= 50$$

$$\text{et } \det A = \det \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} L_1 + 3L_3 \\ L_2 + L_3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 14 & 23 \\ 0 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \times (-1)^{3+1} \times \det \begin{pmatrix} 14 & 23 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \times (14 \times 10 - 23 \times 5) = 25$$

$$\text{finalement, } y = \frac{50}{25} = 2$$

exercice 6:

$$\{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$(0,0) \in \{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\} \text{ quand } x=0$$

$$\text{mais si } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ et } x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(x, x^2) = (\lambda x, \lambda x^2) \neq (\lambda x, (\lambda x)^2)$$

$$\text{donc en général } \lambda(x, x^2) \notin \{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{sauf si } x=0 \text{ ou } \lambda=1)$$

$$\text{et si } x, y \in \mathbb{R}, \quad (x, x^2) + (y, y^2) = (x+y, x^2+y^2) \neq (x+y, (x+y)^2)$$

$$\text{donc en général } (x, x^2) + (y, y^2) \notin \{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\} \quad (\text{sauf si } x \text{ ou } y = 0)$$

Donc $\{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.