EXAMEN

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.

/3

Exercice 1 - Résoudre à l'aide du pivot de Gauss le système linéaire suivant, en fonction du paramètre réel a :

$$\begin{cases} x + ay + 2z = -2 \\ ax + y - z = 1 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

/4

/3

Exercice 2 - Dans cet exercice, on considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

/1

1. Démontrer que A est inversible, et calculer son inverse à l'aide du pivot de Gauss.
2. En déduire une solution du système linéaire $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ x + 4z = 3 \end{cases}$

/4

/3 + /1

Exercice 3 - Déterminer les valeurs réelles de c pour lesquelles la matrice suivante est non-singulière :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & c & c+1 \\ -2 & 3 & c & -1 \\ 1 & c-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & c & 2 \end{bmatrix}$$

/4

Exercice 4 - Considérons la matrice suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

/3

/1

1. Calculer la matrice adjointe de B.
2. En déduire l'inverse de B.

/3

/1.5 + /1.5

Exercice 5 - En utilisant la règle de Cramer, déterminer la valeur de y dans la solution du système linéaire suivant : $\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 2 \\ -x + 2y + 3z = -1 \\ x + 3y + 7z = 1 \end{cases}$

/2

Exercice 6 - Démontrer que l'ensemble $\{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.