

Exercice 1

a) on a pour $n \geq 1$:
$$u_n = \frac{n^3 - 2}{2n^3 - n^2 + 1} = \frac{n^3}{2n^3} \times \frac{(1 - 2/n^3)}{(1 - 1/2n + 1/2n^3)}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{(1 - 2/n^3)}{(1 - 1/2n + 1/2n^3)}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

b) on sait que pour $|q| < 1$, $q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

donc $\left(-\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 5$

Exercice 2

a)
$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1 - (1/4)^{n+1}}{1 - (1/4)}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{4}{3}$

donc la série de terme général u_n est cv et vaut $\frac{4}{3}$

b) On a:
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)}}{n^2 e^{-n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} < 1$$

donc par le critère de d'Alembert la série de f est cv.

Exercice 3

a) $f(0) = 1$

$f'(x) = -e^{-x}$ $f'(0) = -1$

$f''(x) = e^{-x}$ $f''(0) = 1$

donc
$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$
$$= 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$$

$$b) \quad g(0) = 0$$

$$g'(x) = 2 \cos x \sin x = \sin(2x) \quad g'(0) = 0$$

$$g''(x) = 2 \cos(2x) \quad g''(0) = 2$$

$$g^{(3)}(x) = -4 \sin(2x) \quad g^{(3)}(0) = 0$$

$$g^{(4)}(x) = -8 \cos(2x) \quad g^{(4)}(0) = -8$$

$$\text{donc } g(x) = g(0) + x g'(0) + \frac{x^2}{2} g''(0) + \frac{x^3}{6} g^{(3)}(0) + \frac{x^4}{24} g^{(4)}(0) + x^4 \varepsilon(x)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + x^4 \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow 0$$

$$c) \text{ on pose } H(x) = \ln(1+x)$$

$$\text{donc } H(0) = 0$$

$$H'(x) = \frac{1}{1+x} \quad H'(0) = 1$$

$$H''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad H''(0) = -1$$

$$H^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad H^{(3)}(0) = 2$$

$$H^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \quad H^{(4)}(0) = -6$$

$$\text{donc } H(x) = H(0) + x H'(0) + \frac{x^2}{2} H''(0) + \frac{x^3}{6} H^{(3)}(0) + \frac{x^4}{24} H^{(4)}(0) + x^4 \varepsilon(x)$$

$$\text{avec } \varepsilon(x) \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow 0$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon(x)$$

$$\text{donc } \ln(x) = \frac{H(x)}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3 \varepsilon(x)$$

Exercice 4

$$a) \quad \int_{-1}^1 (x+1) e^{-x} dx = \left[(x+1)(-e^{-x}) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 e^{-x} dx$$

$$\quad \quad \quad \downarrow \quad \uparrow$$

$$\quad \quad \quad 1 \quad -e$$

$$= -2e^{-1} + [-e^{-x}]_{-1}^1$$

$$= -\frac{2}{e} + \left(-\frac{1}{e} + e\right) = -\frac{3}{e} + e$$

(3)

b) on pose $u = x^2$

$$\text{donc } \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x \sin(x^2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u du$$

$$= \frac{1}{2} [-\cos u]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

c) on a: $0 < \frac{x}{x^3+1} \leq \frac{1}{x^2}$ pour $x \geq 1$.

$$\text{et } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = 1$$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1} dx$ existe.