

EXAMEN D'ANALYSE 2

/25

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 -

- /3 (a) Démontrer que la suite $u_n = (-\frac{1}{5})^n + \frac{2n^2+1}{n^2+n+3}$ converge, et déterminer sa limite.
 /2 (b) A l'aide du critère de d'Alembert, étudier le comportement de la série de terme général $v_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Exercice 2 - Donner le développement limité en $x = 0$ des fonctions suivantes :

- /2 (a) $f(x) = e^{2x}$ à l'ordre 3.
 /3 (b) $g(x) = \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2.

Exercice 3 -

- /3 (a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties : $\int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx$.
 /2 (b) Calculer à l'aide d'un changement de variable : $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ (on pourra poser $u = x^2$).

Exercice 4 - Calculer les dérivées partielles, jusqu'à l'ordre 2, de la fonction $f(x, y) = x^2 e^{-y}$.

/5 On rappelle qu'il s'agit des six fonctions suivantes : $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (on les note aussi f'_x , f'_y , f''_{xx} , f''_{yy} , f''_{xy} , f''_{yx}).

Exercice 5 - Considérons la fonction $f(x, y) = (x-1)^2 + (y+1)^2$.

- /2 (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f , c'est-à-dire les deux fonctions suivantes : $\frac{\partial f}{\partial x}$ (aussi notée f'_x) et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (aussi notée f'_y).
 /2 (b) Montrer que f a exactement un point critique, et le déterminer (on rappelle qu'un point critique est un point (x_0, y_0) tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$).
 /1 (c) La fonction f a-t-elle un (ou plusieurs) extrémum(s) ? Si oui, dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, local ou global.