/25

Univ. Paris VIII, 2010-2011

EXAMEN D'ANALYSE 2 BIS

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 -

/3 (a) Démontrer que la suite $u_n = (-\frac{2}{3})^n + \frac{3n^3+n^2+2}{n^3+n+1}$ converge, et déterminer sa limite.

/2 (b) A l'aide du critère de d'Alembert, étudier le comportement de la série de terme général $v_n = \frac{\ln n}{3^n}$.

Exercice 2 - Donner le développement limité en $x = 0$ des fonctions suivantes :

/2 (a) $f(x) = \sin(2x)$ à l'ordre 3.

/3 (b) $g(x) = \sqrt{1-x}$ à l'ordre 2.

Exercice 3 -

/3 (a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties : $\int_0^{\pi/2} x \sin(x)\,dx$.

/2 (b) Calculer à l'aide d'un changement de variable : $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ (on pourra poser $u = x^2$).

/5 **Exercice 4 -** Calculer les dérivées partielles, jusquà l'ordre 2, de la fonction $f(x, y) = (\ln x)y^2$. On rappelle qu'il s'agit des six fonctions suivantes : $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (on les note aussi f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, f''_{yx}).

Exercice 5 - Considérons la fonction $f(x, y) = 2(x+1)^2 + 3(y-2)^2$.

/2 (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f, c'est-à-dire les deux fonctions suivantes : $\frac{\partial f}{\partial x}$ (aussi notée f'_x) et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (aussi notée f'_y).

/2 (b) Montrer que f a exactement un point critique, et le déterminer (on rappelle qu'un point critique est un point (x_0, y_0) tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.)

/1 (c) La fonction f a-t-elle un (ou plusieurs) extrémum(s) ? Si oui, dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, local ou global.