Univ. Paris VIII, 2010-2011

Examen d'Analyse 1
Deuxième session

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 -

1. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, -3, 2, $+\infty$, où $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$.
2. En notant
$$g(x) = \frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{1+e^x}}$$
calculer la dérivée de g en précisant son domaine de définition et en pensant bien à décomposer le calcul.
3. Trouver les extrema éventuels de la fonction $h(x) = (x-3)(x+1)^2$ et en déterminer la nature.
4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :
$$(a) \quad \int_0^1 xe^{2x}\,dx \qquad\qquad (b) \quad \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$
5. A l'aide d'un changement de variable, calculer :
   (a) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$
   (b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ en posant $x = \sin t$.
6. Etudier si les intégrales suivantes convergent ou non, et donner leur valeur si elles convergent :
$$(a) \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} \qquad\qquad (b) \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} \qquad\qquad (c) \quad \int_1^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx$$
7. Etudier la convexité de la fonction $p(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 - Dans cet exercice, on considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$f(x) = \frac{e^x-1}{8} \text{ et } g(x) = \frac{120}{e^x+15}.$$
On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives, dans un repère orthonormal du plan (on prendra 2cm pour unité graphique).

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Démontrer que la dérivée de g est

$$g'(x) = -\frac{120e^x}{(e^x + 15)^2}.$$

3. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}_+$, puis dresser son tableau de variations.
4. Calculer la pente de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0, puis tracer T et $\mathcal{C}_g$.
5. Démontrer que la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, puis démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, notée α.
6. En calculant $f(\ln(25))$ et $g(\ln(25))$, démontrer que $\alpha = \ln(25)$; on admet que $\ln(25) \approx 3.2$. Tracer alors la courbe $\mathcal{C}_f$, sur le même graphique que précédemment.
7. Notons D la région du plan définie par

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha \\ g(\alpha) \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

   et R celle définie par

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq g(\alpha) \end{cases}$$

   Hachurer la région D sur le graphique, et représenter R par des pointillés.
8. Calculer l'aire de R, et exprimer à l'aide d'une intégrale l'aire de la région obtenue en réunissant D et R. En déduire que l'aire de D, notée A, est donnée par :

$$A = \int_0^\alpha g(x)dx - \alpha g(\alpha).$$

9. Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$G(x) = 8\Big(x - \ln(e^x + 15)\Big)$$

   est une primitive de g sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire la valeur de l'aire A.