

EXAMEN D'ANALYSE 1

Les calculatrices sont interdites, et les téléphones portables doivent être éteints.

Exercice 1 -

1. Démontrer par récurrence que $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ pour tout $n \geq 1$.
2. Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, 1 , 3 , $+\infty$, où $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$.
3. En notant

$$g(x) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1 + \ln(x+1)}}$$

calculer la dérivée de g en précisant son domaine de définition et en pensant bien à décomposer le calcul.

4. Trouver les extrema éventuels de la fonction $h(x) = (x+1)(x-2)^2$ et en déterminer la nature.
5. Donner une valeur approchée de $j(x) = \frac{1}{1+x}$ au point $x = 1.1$. En déduire une valeur approchée de $k(x) = \ln(1+x)$ en $x = 1.1$ (on rappelle que $\ln 2 \approx 0.693$).
6. A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$(a) \int_0^1 x e^{-x} dx \qquad (b) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

7. A l'aide d'un changement de variable, calculer :

$$(a) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$(b) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \text{ en posant } x = \sin t; \text{ on rappelle que } (\cos x)^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

8. Etudier si les intégrales suivantes convergent ou non, et donner leur valeur si elles convergent :

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \qquad (b) \int_0^1 \frac{dx}{x} \qquad (c) \int_1^{+\infty} x e^{-x} dx$$

9. Etudier la convexité de la fonction $p(x) = x \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 -

1. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4e^x - 2xe^x - 4$.
 - (a) Etudier le sens de variation de g , et déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
 - (b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions : 0 et un réel α . On admettra que $\alpha \approx 1.6$.

2. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$, en notons $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (on prendra environ 2cm comme unité).

- (a) Etudier les variations de la fonction $h(x) = e^x - 2x$, et en déduire que $f(x)$ est défini pour tout x réel.
- (b) Démontrer que pour tout $x \neq 0$ on a

$$f(x) = \frac{2 - \frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x} - 2}$$

et en déduire les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

- (c) Calculer la dérivée f' de f . Démontrer que $f'(x)$ a le même signe que la fonction $g(x)$ étudiée à la question 1., et en déduire le sens de variation de f . Dresser alors le tableau de variation de f .
 - (d) En notant α la solution non nulle de l'équation $g(x) = 0$, démontrer que $f(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$. On admettra que $f(\alpha) \approx 0.6$.
 - (e) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes horizontales, et étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à ces asymptotes.
 - (f) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
3. Dans cette question, on considère encore la fonction $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$ étudiée à la question 2.
- (a) Démontrer que pour tout réel x on a

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 2x} - 1$$

et en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

- (b) Calculer l'aire A de la région du plan définie par

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$