

EXAMEN

Durée : 2 heures

*Les calculatrices sont interdites, et les téléphones doivent être éteints.*

**Exercice 1** - Résoudre à l'aide du pivot de Gauss les systèmes linéaires suivants :

$$(a) \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -2x + 3y = 0 \\ 3x + z = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 4y + 3z + 2t = -2 \\ -x + 2y = -3 \\ 3x - 4y + t = 1 \\ -3x + y - z - 2t = 2 \end{cases}$$

**Exercice 2** - Dans cet exercice, on considère la matrice  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

1. Démontrer que  $A$  est inversible, et calculer son inverse (à l'aide du pivot de Gauss).
2. En déduire une solution du système linéaire  $\begin{cases} -2x - z = 1 \\ x + 3y + z = 2 \\ 2x - y + z = -3 \end{cases}$

**Exercice 3** - Considérons la matrice  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ .

1. Calculer le déterminant de la matrice  $B$  (en la mettant éventuellement sous forme triangulaire supérieure), et déduire qu'elle est inversible.
2. Calculer l'inverse de  $B$ .

**Exercice 4** - Posons  $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ .

1. Calculer la matrice adjointe de  $C$ .
2. En déduire l'inverse de  $C$ .

**Exercice 5** - En utilisant les déterminants, trouver les valeurs réelles de  $c$  pour lesquelles la matrice suivante est non-singulière :  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & c & -6 \\ c & 3 & -6 \end{bmatrix}$

**Exercice 6** - Résoudre en utilisant la règle de Cramer les systèmes linéaires suivants :

$$(a) \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} -x + 2y + z = -2 \\ 3x + 2z = 1 \\ 5x - 3y + z = 3 \end{cases}$$