$\boxed{\text{Corrigé}}$

Exercice 1

1)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

2)
$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ L_2+4L_1 \\ L_3-2L_1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -2 & 9 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ L_2/9 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2/9 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ L_3+4L_2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2/9 & 1 \\ 0 & 0 & 1/9 & -1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 9L_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2/9 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -9 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} L_1+L_3 \\ L_2+\frac{2}{9}L_3 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -9 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} L_1-2L_2 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -9 \end{array}\right]$$

3) Ainsi, $\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \\ z = -9 \end{cases}$ est l'unique solution du système (S)

exercice 2

1)
$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{1} & -3 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 7 & 2 \\ -5 & 2 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ L_2-2L_1 \\ L_3+5L_1 \\ L_4+L_1 \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{1} & -3 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & -13 & 6 & 1 & -11 & 16 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ L_2+L_4 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{1} & -3 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & -13 & 6 & 1 & -11 & 16 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ L_3+13L_2 \\ L_4+4L_2 \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{1} & -3 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -33 & 27 & 93 & 42 \\ 0 & 0 & -11 & 9 & 31 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ -L_3/33 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{1} & -3 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -9/11 & -31/11 & -14/11 \\ 0 & 0 & -11 & 9 & 31 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4+11L_3 \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{1} & -3 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -9/11 & -31/11 & -14/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} L_1-L_3 \\ L_2+3L_3 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{1} & -3 & 0 & 9/11 & 20/11 & 47/11 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -5/11 & -5/11 & -20/11 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -9/11 & -31/11 & -14/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} L_1+3L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -6/11 & 5/11 & -13/11 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -5/11 & -5/11 & -20/11 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -9/11 & -31/11 & -14/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Il y a 3 pivots donc le rang de A est 3.

exercice 3

la matrice augmentée associée est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & (1-a) & (1-a) & a^2 \\ a & (1+a) & (1+a) & a-a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} L_3 \\ L_2 \\ L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1-a \\ a & (1+a) & (1+a) & a-a^2 \\ a & (1-a) & (1-a) & a^2 \end{array}\right]$$ car on ne sait pas si $a \neq 0$.

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ L_2-aL_1 \\ L_3-aL_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & (1-2a) & (1-2a) & 2a^2-a \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ L_3-(1-2a)L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2-a \end{array}\right]$$

Ainsi, si $2a^2-a \neq 0$, le système n'a aucune solution.

Sinon $2a^2-a=0 \Leftrightarrow a(2a-1)=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $a=\frac{1}{2}$

Si $a=0$, la matrice augmentée est : $\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Donc $\begin{cases} x=-y-z+1=1 \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et le système a une infinité de solutions

Si $a=\frac{1}{2}$, la matrice augmentée est : $\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Donc $\begin{cases} x=-y-z+\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ y=-t \\ z=t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et le système a une infinité de solutions

exercice 4

1)

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} C \\ B \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} BC \end{array}$$

donc $BC = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

$$D = (3A - BC)^T = \left(3 \begin{bmatrix} 0 & 8/3 & 1 \\ 3 & 0 & -7/3 \\ 1/3 & -1 & 5/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 8 & 3 \\ 9 & 0 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

2) La matrice augmentée associée est $[D \mid E]$ soit :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1/2} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{} \begin{array}{c} \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{} L_2/(-4) \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{} \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + 5L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donc $\begin{cases} x = -2y + z + 2 = -t \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

D'où $X = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$