Corrigé de l'examen d'algèbre linéaire

exo1 :

Soit (S) le système linéaire suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ -x + 2y + 4z = 1 \\ x + 12y + 10z = 1 \end{cases}$$

On lui associe une matrice augmentée que l'on va mettre sous forme ligne-échelle réduite grâce au pivot de Gauss :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 12 & 10 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1/2 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 12 & 10 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2+L_1 \\ L_3-L_1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 7/2 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 21/2 & 21/2 & 3/2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2 \times \frac{2}{7} \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1/7 \\ 0 & 21/2 & 21/2 & 3/2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3 - \frac{21}{2}L_2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1 - \frac{3}{2}L_2 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & -5/7 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donc le système admet une infinité de solutions de la forme :

$$\begin{cases} x = 2t - \frac{5}{7} \\ y = -t + \frac{1}{7} \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

exercice 2 :

1) On calcule l'inverse de A grâce au pivot de Gauss :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ -L_2 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3-L_2 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ -L_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_1-L_3 \\ L_2+L_3 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Donc A est inversible d'inverse :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2) Le système linéaire $\begin{cases} x+z=1 \\ x-y+2z=-2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ est équivalent à $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

soit $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ d'où

$\begin{cases} x=-3 \\ y=7 \\ z=4 \end{cases}$ est l'unique solution du système.

exercice 3 :

On sait que les additions entre lignes ou colonnes ne modifie pas le déterminant. On va donc transformer cette matrice grâce à ces opérations pour la mettre sous forme triangulaire supérieure puis on calculera son déterminant.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3-L_1 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3+L_2 \\ L_4+4L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4-\frac{L_3}{2} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

D'où $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}\right)$

$= 1 \times (-1) \times (-2) \times 17 = 34$

car le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux exercice 4:

1) On note $B' = \text{adj } B$

On a alors $B'_{ij} = (-1)^{i+j} \, C_{ji}(B)$ pour $1 \leq i,j \leq 3$

D'où $B' = \begin{bmatrix} +(-2) & -1 & +(-3) \\ -2 & +(-1) & -1 \\ +(-2) & -0 & +(-2) \end{bmatrix}^t$

$= \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \text{adj } B$

2) On sait que $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} \times \text{adj } B$

Calculons d'abord $\det B$:

$\det B = \det\left(\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$

$= \det\left(\begin{array}{c} C_1+C_3 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$. car cette opération ne modifie pas le déterminant.

$= (-1)^{3+1} \times (-1) \times \det\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$ en developpant par rapport à la $1^{ère}$ colonne

$= -(-1-1) = 2$

d'où $B^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & -1 \end{bmatrix}$

exercice 5 :

On calcule le déterminant de la matrice $C = \begin{bmatrix} c & 6 & -6 \\ -1 & 2 & c \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

$$\det C = \det\left(\begin{bmatrix} c & 6 & -6 \\ -1 & 2 & c \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(L_1 - 2L_3 \begin{bmatrix} (c-2) & 0 & 0 \\ -1 & 2 & c \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}\right)$$ car cette opération ne modifie pas le déterminant

$$= (-1)^{1+1} \times (c-2) \times \det\left(\begin{bmatrix} 2 & c \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\right)$$ en développant par rapport à la première ligne

$$= (c-2)(-6-3c) = -3(c-2)(c+2)$$

donc $\det C = 0 \iff -3(c-2)(c+2) = 0 \iff c = 2$ ou $c = -2$

Donc la matrice C est non singulière ssi $c \neq 2, -2$.

exercice 6 :

Le système $\begin{cases} 2x + 4y = -1 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ équivaut à $AX = B$

avec $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ et $\det A = 6 - 4 = 2$

En utilisant la règle de Cramer, on a :

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\right)}{2} = \frac{(-3-20)}{2} = \frac{-23}{2}$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right)}{2} = \frac{(10+1)}{2} = \frac{11}{2}$$

d'où la solution unique $\begin{cases} x = -23/2 \\ y = 11/2 \end{cases}$